



# Etude de certains ensembles singuliers associés à une application polynomiale

Thuy Nguyen Thi Bich

## ► To cite this version:

Thuy Nguyen Thi Bich. Etude de certains ensembles singuliers associés à une application polynomiale. Géométrie algébrique [math.AG]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2013. Français. NNT : . tel-00875930

**HAL Id: tel-00875930**

**<https://theses.hal.science/tel-00875930>**

Submitted on 23 Oct 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

Soutenue le 30 Septembre 2013,  
en vue de l'obtention du

**Doctorat de l'Université d'Aix-Marseille**

Spécialité : Géométrie Singularités

par

**NGUYỄN THỊ BÍCH THỦY**

---

## **ÉTUDE DE CERTAINS ENSEMBLES SINGULIERS ASSOCIÉS À UNE APPLICATION POLYNOMIALE**

---

devant le Jury constitué de :

JEAN-PAUL BRASSELET : Directeur de thèse.  
IML, CNRS - Université d'Aix-Marseille.

NGUYỄN VIỆT DŨNG : Président.  
Vietnam Academy of Science and Technology, Hanoi.

KRZYSZTOF KURDYKA, Université de Savoie.

MUTSUO OKA : Rapporteur.  
Université des Sciences de Tokyo.

ANNE PICHON, Université d'Aix-Marseille.

DAVID TROTMAN, Université d'Aix-Marseille.

HÀ HUY VUI : Rapporteur.  
Vietnam Academy of Science and Technology, Hanoi.

GUILLAUME VALETTE, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Cracovie.



## Remerciements

Papa, "cette thèse est un cadeau pour toi."

Mon premier remerciement, je veux le faire à mon père. C'est lui qui le premier m'a donné les notions du raisonnement en mathématique.

Je tiens à remercier les Professeurs Mutsuo OKA et HA Huy Vui, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'être rapporteurs de cette thèse.

C'est avec plaisir que je remercie tout spécialement les Professeurs Guillaume VALETTE et Anna VALETTE, qui m'ont accueillie et ont travaillé avec moi à Cracovie.

Non seulement les discussions que j'ai eues avec eux ont toujours été très utiles pour moi, mais aussi je ne pourrai jamais oublier leur aide durant mes séjours à Cracovie.

Mes remerciements vont tout particulièrement au Professeur NGUYEN Viet Dung.

C'est lui qui m'a donné un grand courage nécessaire et les meilleures conditions pour que je puisse venir faire mes études de doctorat en France. C'est lui aussi qui m'a présenté à mon directeur de thèse.

Les Professeurs Krzysztof KURDYKA, Anne PICHON, David TROTMAN me font le plaisir de participer au jury. Je les en remercie vivement.

Je n'ai pas encore exprimé mes remerciements au Professeur Jean-Paul BRASSELET, mon directeur de thèse.

Je ne peux pas compter les points sur lesquels il m'a aidé pendant (et aussi avant) l'élaboration de ma thèse. Il m'a conduit doucement, de jour en jour et d'une très belle façon, à travailler sur les singularités. Il m'a permis de travailler confortablement grâce à son aide dans la vie pratique. Il me semble que ceci est aussi important, sinon plus, que les difficultés scientifiques qu'il m'a aidé à franchir. Pouvoir apprendre de lui la façon de travailler, de communiquer est aussi important que les mathématiques qu'il m'a apprises. Pour lui, mes remerciements ne seront jamais suffisants.

Le présent travail a été effectué avec l'appui exclusif d'une bourse de la Région PACA :

APD 2010 08050 SGT-A. Qu'elle en soit ici remerciée ainsi que le CNRS (IML et GDR Singularités) et l'université d'Aix-Marseille (ex université de la Méditerranée) qui ont aidé à la participation aux colloques.

Je n'oublie pas les membres de l'Institut de Mathématiques de Luminy et du Département de Mathématiques-Informatique de l'université d'Aix-Marseille pour l'environnement favorable à la recherche et aux études doctorales.

Enfin, je remercie ma mère, qui toujours prend soin de moi, me soutient et me donne du courage. Elle est la deuxième personne à qui je voudrais offrir cette thèse comme cadeau. Mon frère, mes sœurs, ont toujours rendu les choses possibles pour que je puisse poursuivre mes études. Ce sont aussi les personnes que je ne veux pas oublier.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>2</b>
<b>Table des matières</b>	<b>3</b>
<b>Table des figures</b>	<b>7</b>
<b>Chapitre 0. Introduction</b>	<b>9</b>
0.1 Résumé de la thèse . . . . .	9
0.2 L'ensemble de Jelonek . . . . .	11
0.2.1 Introduction de l'ensemble de Jelonek . . . . .	11
0.2.2 Sur les stratifications de l'ensemble de Jelonek . . . . .	12
0.2.3 Caractérisation des applications polynomiales dominantes $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ avec des “façons” de l'ensemble de Jelonek correspondantes . . . . .	14
0.3 L'ensemble $V_F$ des Valette . . . . .	20
0.3.1 L'ensemble $V_F$ et son homologie (ou homologie d'intersection) . . . . .	20
0.3.2 L'ensemble $V_F$ et la conjecture jacobienne . . . . .	23
0.3.3 Stratifications des ensembles $K_0(F) \cup S_F$ et $K_\infty F$ . . . . .	23
<b>Chapitre 1. Rappels sur les applications</b>	<b>25</b>
1.1 Application propre . . . . .	25
1.2 Application dominante . . . . .	27
1.3 Application finie, génériquement finie . . . . .	29
1.4 Application polynomiale de déterminant jacobien partout non nul . . . . .	31
1.5 Application lipschitzienne . . . . .	31
<b>Chapitre 2. Rappels sur les variétés</b>	<b>33</b>
2.1 Pseudovariété . . . . .	33
2.2 Variétés uniréglées . . . . .	33
2.3 Quelques résultats importants sur l'ensemble $S_F$ . . . . .	33
2.4 Stratifications . . . . .	35
2.4.1 Trivialité topologique locale . . . . .	36

2.4.2	Stratification de Whitney	37
2.4.3	Stratification de Thom-Mather	38
2.5	Homologie d'intersection	38
<b>Chapitre 3. L'ensemble <math>V_F</math></b>		<b>41</b>
3.1	Rappels	42
3.2	Construction de l'ensemble $V_F$	45
3.3	Exemples de $V_F$	48
3.4	Stratification de l'ensemble $V_F$	52
3.5	L'ensemble $V_F$ et la conjecture jacobienne	56
3.6	Homologie d'intersection de l'ensemble $V_F$	62
3.6.1	Partie régulière de l'ensemble $V_F$	62
3.6.2	Partie singulière de l'ensemble $V_F$	62
3.6.3	Homologie d'intersection de l'ensemble $V_F$	63
3.7	L'ensemble $V_F$ et la conjecture jacobienne réelle de Jelonek	66
<b>Chapitre 4. Stratifier l'ensemble <math>S_F</math></b>		<b>69</b>
4.1	Partition de $S_F$ définie par $\Xi_0$	70
4.2	Partition de $S_F$ définie par $\Xi$	72
4.3	Relations entre la partition de l'ensemble $S_F$ par Jelonek et la stratification de $S_F$ par $\Xi$	84
4.4	Partition de $S_F$ définie par $\Xi^*$	88
4.4.1	Pourquoi définir la partition de $S_F$ définie par $\Xi^*$ ?	88
4.4.2	Feuilletages de l'ensemble de Jelonek et de l'ensemble des Valette	90
4.4.3	Partition de $S_F$ définie par $\Xi^*$	90
4.4.4	La partition de $S_F$ définie par $\Xi^*$ est une bonne stratification	94
4.5	Partition de $S_F$ définie par la relation “<”	100
4.6	Voisinages tubulaires des strates de la stratification de Thom-Mather de l'ensemble de Jelonek définie par les façons	104
4.7	La stratification de $S_F$ , définie par $\Xi^*$ , est-elle une stratification de Whitney ?	114
4.8	Caractérisation des façons de l'ensemble de Jelonek correspondant aux applications polynomiales dominantes $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$	116
<b>Chapitre 5. Sur les stratifications des ensembles <math>K_0(F)</math>, <math>S_F \cup K_0(F)</math>, <math>B(F)</math>, <math>K(F)</math>, <math>B_\infty(F)</math>, <math>K_\infty(F)</math> et de l'ensemble de test</b>		<b>137</b>
5.1	Un exemple	137
5.2	Stratification de l'ensemble $K_0(F)$	146
5.3	Stratification de l'ensemble $S_F \cup K_0(F)$	152
5.4	Sur les stratifications des ensembles $B(F)$ , $K(F)$ , $B_\infty(F)$ , $K_\infty(F)$ et de l'ensemble de test	154

5.4.1	Sur les stratifications des ensembles $B(F)$ , $K(F)$ , $B_\infty(F)$ et $K_\infty(F)$ . . . . .	154
5.4.2	Sur les stratifications de l'ensemble de test . . . . .	156
<b>Chapitre 6. Quelques observations sur l'ensemble <math>S_F</math></b>		<b>159</b>
6.1	Cas général de $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ . . . . .	159
6.2	Cas $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ . . . . .	160
6.3	L'ensemble $S_F$ d'une application rationnelle . . . . .	193





# Table des figures

2.1	Le parapluie de Whitney . . . . .	37
3.2	Contour apparent à l'infini . . . . .	43
3.3	Le contour apparent à l'infini de la parabole $P := \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ est le point $a$ . . . . .	44
3.4	Le contour apparent à l'infini d'un arc Puiseux . . . . .	45
3.5	La variété $V_F$ de l'application $F(x_1, x_2) = (x_1, x_1^2 x_2^2 + 2x_1^2 x_2)$ . . . . .	50
3.6	La variété $V_F$ de l'application $F(x_1, x_2) = \left(x_1, \frac{x_1 x_2^3}{1+x_2^6}\right)$ . . . . .	51
3.7	L'image $F(\gamma)$ pour $\gamma$ arc de Puiseux . . . . .	57
3.8	L'image $h_F \circ \gamma$ pour $\gamma$ arc de Puiseux . . . . .	57
3.9	Le simplexe $ c $ , la chaîne $ e $ et le cycle $ \sigma $ . . . . .	58
3.10	La rétraction par déformation forte, semi-algébrique $\rho : W \times [0; 1] \rightarrow$ $\mathbb{S}^1.a$ et les chaînes $\tilde{\sigma}_R, \sigma'_R$ et $\theta_R$ . . . . .	59
3.11	La chaîne $\theta'_R$ . . . . .	59
3.12	L'ensemble $\Sigma \cap S^{2n-1}(0, 1)$ . . . . .	60
3.13	Les parties singulière et régulière de l'ensemble des Valette $V_F$ de l'application $F(x_1, x_2) = \left(x_1, \frac{x_1 x_2^3}{1+x_2^6}\right)$ . . . . .	63
3.14	Les cycles candidats pour l'homologie d'intersection de l'ensemble des Valette $V_F$ , pour l'application $F(x_1, x_2) = \left(x_1, \frac{x_1 x_2^3}{1+x_2^6}\right)$ . . . . .	65
3.15	Les cycles d'homologie d'intersection de l'ensemble des Valette $V_F$ pour l'application $F(x_1, x_2) = (x_1, x_1^2 x_2^2 + 2x_1^2 x_2)$ . . . . .	66
4.16	La partition de $S_F$ définie par $\Xi_0$ , pour l'application polynomiale dominante $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - 1, x_2 + 2, (x_1^2 - 1)(x_2 + 2)x_3)$ . . . . .	71
4.17	Direction dans OIJL . . . . .	75
4.18	La partition de $S_F$ définie par $\Xi$ , pour l'application polynomiale do- minante $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - 1, x_2 + 2, (x_1^2 - 1)(x_2 + 2)x_3)$ . . . . .	79
4.19	La partition de $S_F$ définie par $\Xi$ , pour l'application polynomiale do- minante $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2, x_2 x_3, x_1 x_2 x_3)$ . . . . .	81
4.20	La stratification de $S_F$ , définie par $\Xi$ , pour l'application polynomiale dominante $F = (x_1 x_2, x_2 x_3, x_3 x_4, x_4 x_1)$ . . . . .	83
4.21	Les courbes correspondantes aux "façons étoiles" . . . . .	89

4.22	Les feuilletages de $0x_1x_2$ , de $S_F$ et de $V_F$ . . . . .	91
4.23	La stratification de $S_F$ , définie par $\Xi^*$ , pour l'application polynomiale dominante $F = (x_1^2 - 1, x_2 + 2, (x_1^2 - 1)(x_2 + 2)x_3)$ . . . . .	93
4.24	La stratification de $S_F$ , définie par $\Xi^*$ , pour l'application $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, x_2x_3, x_1x_2x_3)$ . . . . .	94
4.25	L'ensemble $S_F$ de l'application $F(x_1, x_2) = ((x_1x_2)^2, (x_1x_2)^3 + x_1)$ . .	97
4.26	La partition de l'espace $(0x_1x_2)$ , divisée par $SingF$ , pour l'application $F(x_1, x_2) = ((x_1x_2)^2, (x_1x_2)^3 + x_1)$ . . . . .	97
4.27	Les images $F(U_i)$ , $i = 1, \dots, 4$ , où $\{U_i\}_{i=1, \dots, 4}$ est la partition de $\mathbb{R}^2_{(x_1, x_2)} \setminus SingF$ , pour l'application $F(x_1, x_2) = ((x_1x_2)^2, (x_1x_2)^3 + x_1)$ .	98
4.28	Les deux nappes $h_F(U_1)$ et $h_F(U_2)$ de l'ensemble des Valette $V_F$ pour l'application $F(x_1, x_2) = ((x_1x_2)^2, (x_1x_2)^3 + x_1)$ . . . . .	98
4.29	Les deux nappes $h_F(U_3)$ et $h_F(U_4)$ de l'ensemble des Valette $V_F$ pour l'application $F(x_1, x_2) = ((x_1x_2)^2, (x_1x_2)^3 + x_1)$ . . . . .	98
4.30	Les deux manières (directions) de tendre vers un point de l'ensemble de Jelonek $S_F$ pour l'application $F(x_1, x_2) = ((x_1x_2)^2, (x_1x_2)^3 + x_1)$ .	99
4.31	L'ensemble $V_F$ de l'application $F(x_1, x_2) = ((x_1x_2)^2, (x_1x_2)^3 + x_1)$ . .	99
4.32	Les courbes correspondantes aux façons de l'ensemble $S_F$ . . . . .	100
4.33	Voisinage tubulaire de la stratification de Thom-Mather de l'ensemble de Jelonek $S_F$ , définie par les façons . . . . .	105
4.34	Les fonctions $\rho$ et $\pi$ pour la stratification de Thom-Mather de la stratification de $S_F$ définie par les façons . . . . .	107
4.35	Homotopies entre $F(\gamma_u)$ et $F(\gamma'_u)$ . . . . .	108
4.36	Voisinage tubulaire d'une strate de la stratification de Thom-Mather de l'ensemble $S_F$ définie par les façons . . . . .	108
4.37	Voisinage tubulaire des strates de la stratification de Thom-Mather de l'ensemble $S_F$ , définie par des façons . . . . .	109
4.38	Les suites de courbes considérées pour vérifier les conditions de Whitney de la stratification de $S_F$ , définie par les façons . . . . .	115
5.39	Les ensembles $F(X)$ et $S_F$ . . . . .	140
5.40	L'ensemble $K_0(F)$ . . . . .	141
5.41	Une partition de $\mathbb{C}^3_{(x_1, x_2, x_3)}$ pour l'application polynomiale dominante $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^3 - x_1x_2x_3, x_2x_3, x_3x_1)$ . . . . .	143
5.42	Une partition de $K_0(F)$ pour l'application polynomiale dominante $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^3 - x_1x_2x_3, x_2x_3, x_3x_1)$ . . . . .	144
5.43	Relation entre les ensembles $F(X)$ , $S_F$ et $K_0(F)$ . . . . .	145
5.44	Relation entre les ensembles $F(X)$ , $S_F$ et $K_0(F)$ quand $F$ est dominante	145
5.45	Un exemple pour l'ensemble lequel $K_0(F) \setminus S_F$ n'est pas lisse . . . . .	149

# Chapitre 0. Introduction

## 0.1 Résumé de la thèse

La thèse a six chapitres. Les chapitres 1 et 2 sont des rappels de connaissances de base sur les applications et les variétés comme : les applications propres, dominantes, finies, lipschitziennes et les applications de déterminant jacobien partout non nul ; les rappels des définitions de pseudovariétés, variétés uniréglées, stratifications, homologie d'intersection d'une variété singulière et surtout ensemble des points asymptotiques d'une application polynomiale. Nous donnons ici des exemples pour éclairer les définitions, ainsi que quelques observations sur ces applications qui nous seront utiles pour les chapitres suivants. Le chapitre 3 concerne l'ensemble des Valette  $V_F$  dont la définition est donnée dans la proposition [0.3.1](#). Les chapitres 4 et 5 concernent les stratifications de l'ensemble des points asymptotiques et de l'ensemble des points critiques d'une application polynomiale  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Le chapitre 6 concerne les caractérisations de l'ensemble des points asymptotiques dans quelques cas particuliers.

L'année 2010, dans leur article, “*On the geometry of polynomial mappings at infinity*” [[Va-Va](#)], Anna et Guillaume Valette ont construit une pseudovariété réelle  $V_F \subset \mathbb{R}^{2n+p}$ , où  $p > 0$ , associée à une application polynomiale  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  (voir la définition dans la proposition [0.3.1](#), page [21](#)). Nous l'appelons l'ensemble des Valette. La partie singulière de  $V_F$  est contenue dans  $(S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ , où  $S_F$  est l'ensemble des points asymptotiques de  $F$  :

$$S_F = \{a \in \mathbb{C}^n \text{ telle que } \exists \{\xi_k\} \subset \mathbb{C}^n, |\xi_k| \rightarrow \infty, F(\xi_k) \rightarrow a\}$$

et  $K_0(F)$  est l'ensemble des points critiques de  $F$ . Dans le cas  $n = 2$ , Anna et Guillaume Valette ont prouvé que si  $F$  est une application polynomiale de déterminant jacobien partout non nul, alors  $F$  n'est pas propre si et seulement si l'homologie (ou l'homologie d'intersection) de  $V_F$  n'est pas triviale en dimension 2. Nous donnons une généralisation de ce résultat, obtenue avec Anna et Guillaume Valette, dans le cas d'une application polynomiale  $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  de déterminant jacobien partout non nul. Un autre résultat, également obtenu avec Anna et Guillaume Valette, est de fournir une stratification de l'ensemble  $S_F$  satisfaisant les conditions de Whitney. De plus, nous montrons que l'ensemble des Valette existe bien pour le cas réel. Cela nous permet de calculer l'ensemble des Valette dans quelques cas particuliers et aussi de calculer son homologie d'intersection, pour mieux comprendre cet ensemble. Ceci est le contenu du chapitre 3.

Dans les années 90, Zbigniew Jelonek [[J1](#), [J2](#), [J3](#)] a étudié d'une manière approfondie l'ensemble des valeurs asymptotiques d'une application polynomiale domi-

nante. Il a montré que cet ensemble est une variété algébrique complexe singulière de dimension (complexe)  $n - 1$ . En utilisant les suites tendant vers l'infini et telles que leurs images tendent vers les points de  $S_F$ , lesquelles seront formalisées sous la forme de “façons”, nous donnons une méthode pour stratifier l'ensemble de Jelonek par les deux étapes suivantes :

A) Subdiviser l'hypersurface  $S_F$  déterminée par Jelonek en hypersurfaces irréductibles (voir définition 0.2.4, page 13).

B) Distinguer entre les courbes tendant vers l'infini en utilisant le “degré”, c'est-à-dire, décrire la “vitesse” avec laquelle un point de l'ensemble de  $V_F$  tend vers la partie singulière de  $S_F \times \{0_{\mathbb{R}^{p'}}\} \subset V_F$  (voir définition 4.4.2, page 90).

Nous obtenons une stratification de l'ensemble  $S_F$ , appelée la stratification définie par les façons. L'un de nos résultats principaux est de montrer que la stratification définie par les façons est une stratification de Thom-Mather. Il existe une stratification de Whitney de  $S_F$  telle que l'ensemble des façons possibles soit constant sur chaque strate. Cela nous conduit à la question “*La stratification de l'ensemble de Jelonek, définie par les façons, est-elle une stratification de Whitney ?*” Nous remarquons que, une étape importante serait de montrer que les applications définies par les façons sont des applications constructibles. Ceci est le contenu du chapitre 4.

Pour calculer l'homologie d'intersection de l'ensemble des Valette  $V_F$ , il nous faut bien comprendre les ensembles  $S_F$ ,  $K_0(F)$  et  $K_0(F) \cup S_F$ . Dans le chapitre 5, nous fournissons une méthode pour stratifier l'ensemble  $K_0(F)$ . Nous prouvons que l'ensemble  $S_F \cup K_0(F)$  est fermé, alors que nous fournissons un exemple pour montrer qu'en général, l'ensemble  $K_0(F)$  n'est pas fermé. Nous obtenons donc une stratification de l'ensemble  $S_F \cup K_0(F)$ , définie par les façons, compatible avec les stratifications de  $S_F$  et de l'adhérence  $\overline{K_0(F)}$  de  $K_0(F)$ . Nous explicitons un exemple pour montrer qu'en général, l'ensemble  $S_F \setminus K_0(F)$  n'est pas lisse. Mais la question “*Est-ce que les ensembles  $S_F \cup K_0(F)$  et  $K_0(F) \setminus S_F$  sont de dimension pure ?*” est toujours notre conjecture. Enfin, nous donnons aussi comme applications de la stratification de  $S_F$  définie par les façons, une méthode pour obtenir les stratifications de l'ensemble de bifurcation  $B(F)$ ; de l'ensemble des points de bifurcations à l'infini  $B_\infty(F)$ ; de l'ensemble  $K_\infty(F)$  des valeurs critiques asymptotiques de  $F$ ; de l'ensemble  $K(F) := K_0(F) \cup K_\infty(F)$  et de l'ensemble de test des applications polynomiales tel que défini par Jelonek.

Dans certains cas particuliers (tels que le cas  $n = 3$  et le degré  $d = 2$ ) nous fournissons un algorithme pour expliciter une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , de degré  $d$ , dont l'ensemble de Jelonek  $S_F$  soit donné. Ceci nous conduit également à expliciter et à “classifier” les ensembles de Jelonek possibles. La méthode des “façons” nous permet aussi “d'envisager” le résultat suivant : “Considérons les applications polynomiales dominantes  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  de degré  $d$ . Pour chaque couple  $(n, d)$ , nous pouvons décrire la liste des ensembles de Jelonek  $S_F$

possibles, et pour chacun d'entre eux, nous pouvons expliciter une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  de degré  $d$  dont l'ensemble de Jelonek soit  $S_F$ ." Nous donnons un algorithme pour prouver ce théorème dans le cas général et notre méthode nous conduit à penser que nous pouvons procéder à cet algorithme par un programme d'ordinateur. Nous prouvons ce résultat dans le cas  $(n, d) = (3, 2)$ , où une hypersurface irréductible admet au maximum 2 façons. Cela nous conduit aussi à la question "Est-ce qu'une hypersurface irréductible de  $S_F$  d'une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  admet au maximum  $n - 1$  façons ?" Ceci est explicité dans le chapitre 6 et une partie du chapitre 4, là où nous étudions d'une manière approfondie l'ensemble de Jelonek dans quelques cas particuliers (tels que le cas  $n = 3$  et le degré  $d = 2$ ).

À l'instar du travail d'Anna et Guillaume Valette, cette étude nous permet d'approcher d'une manière nouvelle la conjecture jacobienne : "Est-ce qu'une application polynomiale  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  de déterminant jacobien partout non nul est un automorphisme polynomial ?" L'année 1994, Pinchuk [Pi] a donné un contre exemple pour la conjecture jacobienne pour le cas réel d'une application polynomiale  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Notons que le déterminant jacobien de cet exemple est un polynôme toujours différent de 0, et non pas un polynôme constant non nul. Nous avons alors la conjecture jacobienne réelle de Jelonek : "Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ) une application polynomiale qui est un difféomorphisme local satisfaisant  $\text{codim} S_F = 2$ , alors  $F$  est bijective." Pour approcher cette conjecture, nous posons la question naturelle : "Dans le cas  $n = 3$ , si  $F$  est une application polynomiale de déterminant jacobien partout non nul, est-ce que  $F$  n'est pas propre si et seulement si l'homologie (ou l'homologie d'intersection) de  $V_F$  n'est pas triviale en dimension 2 ? Si oui, est-ce que cela est vrai pour le cas général ?"

## 0.2 L'ensemble de Jelonek

### 0.2.1 Introduction de l'ensemble de Jelonek

Soit  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application polynomiale. Notons  $S_F$  l'ensemble des points du but pour lesquels l'application  $F$  n'est pas propre, *i.e.*

$$S_F = \{a \in \mathbb{C}^n \text{ telle que } \exists \{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^n, |\xi_k| \rightarrow \infty, F(\xi_k) \rightarrow a\}.$$

L'ensemble  $S_F$  est appelé variété asymptotique ou ensemble de Jelonek de  $F$ .

Rappelons qu'une application polynomiale  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  est dite dominante si l'adhérence de  $F(\mathbb{C}^n)$  est dense dans  $\mathbb{C}^n$ , *i.e.*  $\overline{F(\mathbb{C}^n)} = \mathbb{C}^n$ .

L'ensemble  $S_F$  a été intensément étudié par Z. Jelonek dans une série d'articles [J1, J2, J3]. En particulier, il a montré les résultats suivants :

**Théorème 0.2.1.** [J1] Soit  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application polynomiale dominante et  $\mathbb{C}(F_1, \dots, F_n) \subset \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$  une extension de corps. Pour chaque  $i$ , soit une équation irréductible de  $x_i$  sur  $\mathbb{C}[F_1, \dots, F_n]$

$$\sum_{k=0}^{n_i} \phi_k^i(F) x_i^{n_i-k} = 0,$$

où les  $\phi_k^i$  sont des polynômes. Soit  $S = \bigcup_{i=1}^n \{a \in \mathbb{C}^n : \phi_0^i(a) = 0\}$ . Alors,  $F$  est propre en  $a$  si et seulement si  $a \in \mathbb{C}^n \setminus S$ , c'est-à-dire  $S_F = S$ .

De plus, l'ensemble  $S_F$  est vide ou une hypersurface  $\mathbb{C}$ -uniréglée de dimension  $n - 1$ .

Jelonek montre plus généralement le théorème suivant :

**Théorème 0.2.2.** [J3] Si  $F : X \rightarrow Y$  est une application polynomiale dominante entre variétés affines lisses de même dimension, alors l'ensemble des points où  $F$  n'est pas propre est vide ou est une hypersurface.

## 0.2.2 Sur les stratifications de l'ensemble de Jelonek

Nous donnons ici une méthode pour stratifier l'ensemble de Jelonek. La première idée est de “subdiviser” les hypersurfaces dans le théorème 0.2.1 de Jelonek en hypersurfaces irréductibles.

**Exemple 0.2.3.** Soit  $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  l'application polynomiale dominante telle que

$$F_1 := x_1, \quad F_2 := x_2, \quad F_3 := x_1 x_2 x_3.$$

Pour déterminer l'ensemble  $S_F$  par le théorème de Jelonek, il faut résoudre les équations suivantes

$$\sum_{k=0}^{n_i} \phi_k^i(F) x_i^{n_i-k} = 0, \forall i = 1, 2, 3.$$

Avec  $i = 1$ , nous avons  $x_1 - F_1 = 0$ , alors  $\phi_0^1(F) = 1$ , la contribution de la première coordonnée à  $S_F$  est donc vide.

Avec  $i = 2$ , nous avons  $x_2 - F_2 = 0$ , alors  $\phi_0^2(F) = 1$ , la contribution de la deuxième coordonnée à  $S_F$  est donc vide.

Avec  $i = 3$ , nous avons  $F_1 F_2 x_3 - F_3 = 0$ , alors  $\phi_0^3(F) = F_1 F_2$ .

L'ensemble  $S_F$  est l'ensemble algébrique  $\{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3 : \alpha_1 \alpha_2 = 0\}$  qui est un ensemble algébrique réductible.

Maintenant, nous “subdivisons” cette hypersurface en hypersurfaces irréductibles en regardant les suites  $\{\xi_k\} = \{(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})\}$  tendant vers l'infini telles que l'image

de ces suites tendent vers un point dans  $S_F$ . Nous cherchons les possibilités de telles suites  $\{\xi_k\}$ . Puisque la suite  $\{F(\xi_k)\} = \{(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{1,k}x_{2,k}x_{3,k})\}$  ne tend pas vers l'infini, alors les suites coordonnées  $x_{1,k}$  et  $x_{2,k}$  ne peuvent pas tendre vers l'infini. Donc  $x_{3,k}$  tend vers l'infini. Nous avons les deux cas possibles suivants :

1) ou bien  $x_{3,k}$  tend vers l'infini et  $x_{1,k}$  tend vers 0 telles que  $x_{1,k}x_{3,k}$  tend vers  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}$ . Supposons que  $x_{2,k}$  tende vers  $\mu$  dans  $\mathbb{C}$ . Nous obtenons une hypersurface irréductible  $S_{F_1} = \{\alpha_1 = 0\}$  de dimension 2 de  $S_F$ . La troisième coordonnée  $x_{3,k}$  tend vers l'infini, la première coordonnée tend vers un nombre complexe : 0, fixe, lequel ne dépend pas du point  $a = (0, \alpha_2, \alpha_3)$  de  $S_{F_1}$ . Nous disons que la “façon” de  $S_{F_1}$  est (3)[1].

2) ou bien  $x_{3,k}$  tend vers l'infini et  $x_{2,k}$  tend vers 0 telles que  $x_{2,k}x_{3,k}$  tend vers  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}$ . Supposons que  $x_{1,k}$  tende vers  $\mu$  dans  $\mathbb{C}$ . Nous obtenons une hypersurface irréductible  $S_{F_2} = \{\alpha_2 = 0\}$  de dimension 2 de  $S_F$ . La troisième coordonnée  $x_{3,k}$  tend vers l'infini, la deuxième coordonnée tend vers un nombre complexe : 0, fixe, lequel ne dépend pas du point  $a = (\alpha_1, 0, \alpha_3)$  de  $S_{F_2}$ . Nous disons que la “façon” de  $S_{F_2}$  est (3)[2].

Nous avons subdivisé l'ensemble  $S_F$  en hypersurfaces irréductibles  $S_{F_1} = \{\alpha_1 = 0\}$  (par la façon (3)[1]) et  $S_{F_2} = \{\alpha_2 = 0\}$  (par la façon (3)[2]). Nous appelons cette méthode, la *méthode des “façons”*.

Remarquons qu'il suffit, pour définir  $S_F$  de considérer des suites  $\{\xi_k\}$  tendant vers l'infini, au sens suivant : nous pouvons nous restreindre aux suites  $\{\xi_k\}$  tendant vers l'infini telles que chaque coordonnée ou bien tend vers l'infini ou bien converge (voir section 4.1, page 70).

Nous formalisons l'idée pour stratifier l'ensemble de Jelonek de la manière suivante :

A) Subdiviser l'hypersurface  $S_F$  déterminée par Jelonek en hypersurfaces irréductibles par la définition suivante :

**Définition 0.2.4.** Soit  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application polynomiale telle que  $S_F \neq \emptyset$ . Fixons un point  $a$  de  $S_F$ , il existe une suite  $\{\xi_k^a\} \subset \mathbb{C}^n$ ,  $\xi_k^a = \{(x_{k,1}^a, \dots, x_{k,n}^a)\}$  tendant vers l'infini telle que  $F(\xi_k^a)$  tende vers  $a$ . Alors il existe toujours  $i \in \mathbb{N}^*$  tel que  $x_{k,i}^a$  tende vers l'infini. Nous définissons

1) “Une façon de tendre vers l'infini” comme un  $(p, q)$ -uplet :

$$\kappa(\xi_k^a) = (i_1, \dots, i_p)[j_1, \dots, j_q]$$

où

$$\begin{cases} x_{k,i_r}^a \rightarrow \infty \text{ pour tout } r = 1, \dots, p, \\ x_{k,j_s}^a \rightarrow \lambda_{j_s}^a \equiv \text{const.} \in \mathbb{C} \text{ pour tout } s = 1, \dots, q, \\ \text{où } \{\lambda_{j_s}^a\} \text{ ne dépend pas de } a \text{ quand } a \text{ décrit } S_F. \end{cases}$$



Le second ensemble peut être vide. L'ensemble  $\{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q\}$  est contenu dans l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ , mais ne lui est pas nécessairement égal.

- 2)  $\Xi(a) := \{\kappa(\xi_k^a) : \xi_k^a \rightarrow \infty, F(\xi_k^a) \rightarrow a\}$ , c'est-à-dire,  $\Xi(a)$  est l'ensemble des façons de tendre vers l'infini du point  $a$ .
- 3)  $or(a) := \sharp(\Xi(a))$ , c'est-à-dire,  $or(a)$  est le nombre des façons de tendre vers l'infini pour le point  $a$  de  $S_F$ .

B) Distinguer entre les courbes tendant vers l'infini en utilisant les “façons étoiles” (ce point sera explicité au chapitre 4 : voir définition 4.4.2, page 90).

**Théorème 0.2.5.** *Soit  $F = (F_1(x), \dots, F_n(x)) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application polynomiale dominante telle que  $S_F$  ne soit pas vide. Alors, la partition de l'ensemble  $S_F$  en classes d'équivalence définie par les façons étoiles est une stratification satisfaisant la condition de frontière.*

**Définition 0.2.6.** *La stratification de  $S_F$  définie par les façons étoiles sera appelée “stratification définie par les façons”.*

**Théorème 0.2.7.** *Soit  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application polynomiale dominante. La stratification de  $S_F$  définie par les façons est une stratification de Thom-Mather. Elle satisfait donc la condition de trivialité topologique locale.*

**Proposition 0.2.8.** *Il existe une stratification de Whitney de  $S_F$  telle que l'ensemble des façons soit constant sur chaque strate.*

**Conjecture 0.2.9.** *La stratification de l'ensemble de Jelonek  $S_F$  d'une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , définie par les façons, est une stratification de Whitney.*

**Conjecture 0.2.10.** *La définition de la stratification de  $S_F$  définie par les façons est aussi valable pour :*

- 1) *Le cas réel, c'est-à-dire, pour les applications polynomiales dominantes  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .*
- 2) *Les applications polynomiales dominantes  $F : X \rightarrow Y$ , où  $X$  et  $Y$  sont des variétés affines lisses de même dimension.*

### 0.2.3 Caractérisation des applications polynomiales dominantes $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ avec des “façons” de l'ensemble de Jelonek correspondantes

Soit  $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  une application polynomiale dominante de degré 2 telle que  $S_F$  n'est pas vide. Une façon  $\kappa$  de  $S_F$  appartient à l'un des six groupes de façons suivants :

- 1) groupe I : (1, 2, 3),
- 2) groupe II : (1,2), (2,3) et (3,1),
- 3) groupe III : (1), (2) et (3),
- 4) groupe IV : (1,2)[3], (1,3)[2] et (2,3)[1],
- 5) groupe V : (1)[2], (1)[3], (2)[1], [2](3), [3](1) et [3](2),
- 6) groupe VI : (1)[2,3], (2)[1,3] et (3)[1,2].

Supposons que toute strate de dimension 2 de  $S_F$  n'admette qu'une seule façon. Soit  $\{\xi_k\} = \{(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})\}$  une suite dans  $\mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3$  tendant vers l'infini et telle que  $F(\xi_k)$  tende vers un point d'une telle strate. Pour  $i = 1, 2, 3$ , les polynômes coordonnés  $F_i(\xi_k)$  ne tendent pas vers l'infini, mais certaines des coordonnées  $x_{i,k}$  tendent vers l'infini. Supposons que, par exemple,  $x_{1,k}$  et  $x_{2,k}$  tendent vers l'infini, alors  $F_i$  ne peut pas admettre l'une des coordonnées  $x_1$  ou  $x_2$ , seule, comme variable mais il peut admettre comme variables  $(x_1 - x_2)$ ,  $(x_1 - x_2)x_1$  ou  $(x_1 - x_2)x_2$ . Nous dirons que ces variables sont des variables "pertinentes".<sup>1</sup>

En général, nous pourrions donc considérer  $F$  comme une application polynomiale des combinaisons des variables "pertinentes"  $x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1, x_1 - x_2, (x_1 - x_2)x_1, (x_1 - x_2)x_2, (x_1 - x_2)x_3, x_1 - x_3, (x_1 - x_3)x_1, (x_1 - x_3)x_2, (x_1 - x_3)x_3, x_2 - x_3, (x_2 - x_3)x_1, (x_2 - x_3)x_2$  et  $(x_2 - x_3)x_3$ . Notons  $f_j$  ces variables.

Si comme nous l'avons supposé, toute strate de dimension 2 de  $S_F$  n'admet qu'une seule façon, alors, même en tenant compte des conditions imposées par cette façon, la forme des ensembles de Jelonek  $S_F$  possibles et des applications  $F$  correspondantes est assez compliquée et ceci est ce que nous étudierons d'une manière précise dans le chapitre 6.

Supposons maintenant qu'une strate de dimension 2 de  $S_F$  admette deux façons  $\kappa$  et  $\kappa'$ . Alors, le nombre de variables "pertinentes" va être réduit, grâce aux conditions imposées par les façons  $\kappa$  et  $\kappa'$ . Nous décrivons un algorithme contenant les deux étapes suivantes :

**Algorithme 0.2.11. Étape 1 :** Déterminer, en fonction des façons  $\kappa$  et  $\kappa'$ , quelles sont les variables pertinentes dans  $F$  ainsi que les suites  $\{\xi_k\}$  pour  $\kappa$  et  $\{\xi'_k\}$  pour  $\kappa'$ , pour que la strate correspondant à ces façons soit de plus grande dimension possible.

**Étape 2 :** Déterminer la forme précise de  $F$  en tenant compte des contraintes suivantes :

- les deux façons doivent correspondre à la même strate. Ceci implique que les valeurs asymptotiques de  $F(\xi_k)$  et  $F(\xi'_k)$  doivent coïncider : Supposons que  $\{\xi_k\} = \{(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})\}$  et  $\{\xi'_k\} = \{(x'_{1,k}, x'_{2,k}, x'_{3,k})\}$  soient deux suites correspondant respectivement aux façons  $\kappa$  et  $\kappa'$ . Pour que  $\kappa$  et  $\kappa'$  soient deux façons de

---

1. En fait, de façon plus précise, nous pouvons remplacer les variables  $(x_i - x_j)$  par  $(x_i - ax_j)$ , où  $a$  est un nombre complexe différent de 0. Cela ne change pas les résultats que nous obtenons par la suite.

la même strate de dimension 2 de  $S_F$ , alors  $F(\xi_k)$  et  $F(\xi'_k)$  doivent admettre au moins les mêmes deux coordonnées tendant indépendamment vers deux nombres complexes quelconques,

- l'application  $F$  est dominante. Ceci implique deux conditions :

+ les suites  $\{F(\xi_k)\}$  et  $\{F(\xi'_k)\}$  doivent admettre au moins une même coordonnée tendant vers 0,

+ les polynômes coordonnées  $F_1, F_2$  et  $F_3$  doivent être indépendants, cela signifie que  $F$  dépend au moins de 3 variables parmi les  $f_j$  ci-dessus, convenablement choisies.

**Théorème 0.2.12.** Soit  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  une application polynomiale dominante de degré 2 telle que  $S_F$  n'est pas vide. Alors, pour chaque point  $a$  d'une hypersurface irréductible  $S_2$  de  $S_F$ , nous avons  $1 \leq \text{or}(a) \leq 2$ . De plus, si  $\text{or}(a) = 2$ , alors  $S_F$  est irréductible et  $S_F$  admet deux façons parmi les cas suivants :

1)  $\kappa = (1, 2, 3)$  et  $\kappa' = (i_1, i_2)[j]$  où  $\{(i_1, i_2, j)\} = \{(1, 2, 3)\}$  : dans ce cas,  $F$  s'écrit sous la forme

$$F = \tilde{F}(x_{i_1} - x_{i_2}, (x_{i_1} - x_{i_2})x_{i_1}, (x_{i_1} - x_{i_2})x_{i_2}, (x_{i_1} - x_{i_2})x_j, (x_{i_1} - x_j)x_j, (x_{i_2} - x_j)x_j).$$

2)  $\kappa = (1, 2, 3)$  et  $\kappa' = (i)[j_1, j_2]$  où  $\{(i, j_1, j_2)\} = \{(1, 2, 3)\}$  : dans ce cas,  $F$  s'écrit sous la forme

$$F = \tilde{F}((x_i - x_{j_1})x_{j_1}, (x_i - x_{j_1})x_{j_2}, (x_i - x_{j_2})x_{j_1}, (x_i - x_{j_2})x_{j_2}, (x_{j_1} - x_{j_2}), \\ (x_{j_1} - x_{j_2})x_i, (x_{j_1} - x_{j_2})x_{j_1}, (x_{j_1} - x_{j_2})x_{j_2}).$$

3)  $\kappa = (1, 2)[3]$  et  $\kappa' = (i)[3, j]$ , où  $\{(i, j)\} = \{(1, 2)\}$  : dans ce cas,  $F$  s'écrit sous la forme

$$F = \tilde{F}(x_3, x_j x_3, x_i x_3, (x_i - x_j)x_j).$$

4)  $\kappa = (1, 2)[3]$  et  $\kappa' = (3)[1, 2]$  : dans ce cas,  $F$  s'écrit sous la forme

$$F = \tilde{F}(x_1 x_3, x_2 x_3, x_1 - x_2, r_1 x_1 x_3 + r_2 x_2 x_3 + r_3(x_1 - x_2)x_1 + r_4(x_1 - x_2)x_2).$$

5)  $\kappa = (1, 3)[2]$  et  $\kappa' = (i)[2, j]$  où  $\{(i, j)\} = \{(1, 3)\}$  : dans ce cas,  $F$  s'écrit sous la forme

$$F = \tilde{F}(x_2, x_2 x_j, x_i x_2, (x_i - x_j)x_j).$$

6)  $\kappa = (1, 3)[2]$  et  $\kappa' = (2)[1, 3]$  : dans ce cas,  $F$  s'écrit sous la forme

$$F = \tilde{F}(x_1 x_2, x_2 x_3, x_1 - x_3, r_1 x_1 x_2 + r_2 x_2 x_3 + r_3(x_1 - x_3)x_1 + r_4(x_1 - x_3)x_3).$$

7)  $\kappa = (2, 3)[1]$  et  $\kappa' = (i)[1, j]$ , où  $\{i, j\} = \{2, 3\}$  : dans ce cas,  $F$  s'écrit sous la forme

$$F = \tilde{F}(x_1, x_1x_i, x_1x_j, (x_i - x_j)x_j).$$

8)  $\kappa = (2, 3)[1]$  et  $\kappa' = (1)[2, 3]$  : dans ce cas,  $F$  s'écrit sous la forme

$$F = \tilde{F}(x_1x_3, x_1x_2, x_3 - x_2, r_1x_1x_3 + r_2x_1x_2 + r_3(x_3 - x_2)x_3 + r_4(x_3 - x_2)x_2).$$

9)  $\kappa = (1)[2, 3]$  et  $\kappa' = (i)[1, j]$ , avec  $\{(i, j) = \{(2, 3)\}$  : dans ce cas,  $F$  s'écrit sous la forme

$$F = \tilde{F}(x_j, x_1x_i, r_1x_ix_j + r_2x_1x_j).$$

**Conjecture 0.2.13.** Nous pouvons procéder à l'algorithme 0.2.11 par un programme d'ordinateur pour obtenir les résultats du théorème suivant :

**Théorème 0.2.14.** Considérons les applications polynomiales dominantes  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  de degré  $d$ . Pour chaque couple  $(n, d)$ , nous pouvons écrire la liste des ensembles de Jelonek  $S_F$  possibles, et pour chacun d'entre eux, nous pouvons expliciter une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  de degré  $d$  dont l'ensemble de Jelonek soit  $S_F$ .

Nous avons prouvé que pour le cas  $(n, d) = (3, 2)$ , l'ensemble  $S_F$  contient au maximum trois hypersurfaces. Donc  $S_F$  est de l'une des formes suivantes :

- 1) L'union au maximum de trois plans.
- 2) L'union d'un plan et d'une surface.
- 3) Une surface.
- 4) L'union de deux surfaces.
- 5) L'union de deux plans et d'une surface.
- 6) L'union de deux surfaces et d'un plan.

Par ailleurs, nous pouvons donner "la liste" des possibilités de l'ensemble  $S_F$  dans ce cas, comme le montre le théorème suivant :

**Théorème 0.2.15.** L'ensemble de Jelonek d'une application polynomiale non-propre, dominante de  $\mathbb{C}^3$  dans  $\mathbb{C}^3$  et de degré 2 est l'un des 5 éléments de la liste  $LS_F$  suivante. De plus, tout élément de la liste, peut être réalisé comme ensemble de Jelonek d'une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  de degré 2.

$LS_F$  : 1) Un plan quelconque.

2) Un paraboloïde.

3) Union d'un plan quelconque

$$(\mathcal{P}) : \quad r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3 + r_4 = 0,$$

et d'un plan

$$(\mathcal{P}') : \quad r'_1x_1 + r'_2x_2 + r'_3x_3 + r'_4 = 0,$$

où nous pouvons choisir deux des coefficients  $r'_1, r'_2, r'_3$ , le troisième ainsi que  $r'_4$  étant alors fixés.

4) Union d'un plan quelconque

$$(\mathcal{P}) : \quad r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3 + r_4 = 0$$

et d'un paraboloïde

$$(\mathcal{S}) : \quad r'_i x_i^2 + r'_j x_j + r'_l x_l + r'_4 = 0, \quad \{i, j, l\} = \{1, 2, 3\},$$

où nous pouvons choisir deux des coefficients  $r'_1, r'_2, r'_3$ , le troisième ainsi que  $r'_4$  étant alors fixés.

5) Union de trois plans des formes

$$(\mathcal{P}) : \quad r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3 + r_4 = 0,$$

$$(\mathcal{P}') : \quad r'_1x_1 + r'_2x_2 + r'_3x_3 + r'_4 = 0,$$

$$(\mathcal{P}'') : \quad r''_1x_1 + r''_2x_2 + r''_3x_3 + r''_4 = 0,$$

où

a) pour  $(\mathcal{P}')$ , nous pouvons choisir deux des coefficients  $r'_1, r'_2, r'_3$ , le troisième ainsi que  $r'_4$  étant alors fixés.

b) pour  $(\mathcal{P}'')$ , nous pouvons choisir deux des coefficients  $r''_1, r''_2, r''_3$ , le troisième ainsi que  $r''_4$  étant alors fixés.

Le théorème 0.2.15 ci-dessus nous conduit au résultat suivant :

**Théorème 0.2.16.** Soit  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  une application polynomiale non-propre, dominante de degré 2. Alors l'ensemble  $S_F$  est de l'une des formes suivantes :

- 1) L'union au maximum de trois plans.
- 2) L'union d'un plan et d'un paraboloïde.
- 3) Un paraboloïde.

Par ailleurs, il existe un algorithme permettant d'explicitier une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  de degré 2 telle que l'ensemble  $S_F$  soit donné par l'une des situations du théorème 0.2.15 :

**Théorème 0.2.17.** Il existe un algorithme permettant d'explicitier une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  de degré 2 telle que l'ensemble  $S_F$  soit donné par l'une des situations suivantes :

- 1) Si  $S_F$  est un plan d'équation  $\alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$ , alors

$$F = (x_1x_2, x_2x_3, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + g(x_2) + r_4),$$

où  $g(x_2)$  est un polynôme non nul en la variable  $x_2$ , de coefficient constant nul et de degré au maximum 2.

2) Si  $S_F$  est l'union de deux plans d'équations  $\alpha_1 = c_1$ ,  $\alpha_2 = c_2$  où  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ , et d'un plan d'équation  $\alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$ , alors

$$F = (x_1x_2 + c_1, x_2x_3 + c_2, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + g(x_1x_3) + r_4 - c_1r_1 - c_2r_2),$$

où  $g(x_1x_3)$  est un polynôme non nul, de coefficient constant nul, et de degré 1 en la variable le produit  $x_1x_3$ .

3) Si  $S_F$  est l'union d'un plan d'équation  $\alpha_1 = c_1$ , où  $c_1 \in \mathbb{C}$  et d'un plan d'équation  $\alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$ , alors

$$F = (x_1x_2 + c_1, x_2x_3, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + g(x_1) + r_4 + c_1r_1),$$

où  $g(x_1)$  est un polynôme non nul, de coefficient constant nul et de degré au maximum 2 en la variable  $x_1$ .

4) a) Si  $S_F$  est l'union d'un plan d'équation  $\alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$  et d'un autre plan de la forme  $\alpha_3 = r'_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$ , où  $r_1 \neq r'_1$  et  $r'_1 \neq 0$ , alors

$$F = (x_1x_2 + x_1, x_2x_3, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r'_1x_1 + r_4).$$

b) Si  $S_F$  est l'union d'un plan d'équation  $\alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$  et d'un autre plan de la forme  $\alpha_2 = \frac{1}{r_2}\alpha_3 + r'_1\alpha_1 - \frac{r_4}{r_2}$ , où  $r_2 \neq 0$ , alors

$$F = (x_1x_2 + x_1, x_2x_3 + r'_1x_1, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r_4).$$

c) Si  $S_F$  est l'union d'un plan d'équation  $\alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$  et d'un autre plan de la forme  $\alpha_1 = \frac{1}{r_1}\alpha_3 + r'_2\alpha_2 - \frac{r_4}{r_1}$ , où  $r'_1 \neq 0$ , alors

$$F = (x_1x_2 + r'_2x_3, x_2x_3 + x_3, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r_4).$$

5) a) Si  $S_F$  est l'union d'un plan d'équation  $\alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$  et d'une surface de la forme  $\alpha_3 = r_1\alpha_1^p + r'_1\alpha_1^{p'} + r_2\alpha_2 + r_4$ , alors

$$F = (x_1x_2 + x_1, x_2x_3, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r_1x_1^p + r'_1x_1^{p'} + r_4).$$

b) Si  $S_F$  est l'union d'un plan quelconque d'équation  $\alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$  et d'une surface de la forme  $\alpha_2 = \frac{1}{r_2}\alpha_3 + r_1\alpha_1^p + r'_1\alpha_1^{p'} - \frac{r_4}{r_2}$ , si  $r_2 \neq 0$ , alors

$$F = (x_1x_2 + x_1, x_2x_3 + r_1x_1^p + r'_1x_1^{p'}, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r_4).$$

c) Si  $S_F$  est l'union d'un plan d'équation  $\alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$  et d'une surface de la forme  $\alpha_1 = \frac{1}{r_1}\alpha_3 + r_3\alpha_2^p + r'_3\alpha_2^{p'} - \frac{r_4}{r_1}$ , si  $r_1 \neq 0$ , alors

$$F = (x_1x_2 + r_3x_3^p + r'_3x_3^{p'}, x_2x_3 + x_3, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r_4).$$

6) Si  $S_F$  est une surface de la forme  $\alpha_3 = r_2\alpha_2 + r_1\alpha_1^p + r'_1\alpha_1^{p'} + r_4$ , alors

$$F = (x_1x_2 + x_1, x_2x_3, r_2x_2x_3 + r_1x_1^p + r'_1x_1^{p'} + x_2 + r_4).$$

7) Si  $S_F$  est l'union de trois plans d'équations :

$$\begin{aligned}\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_3\alpha_3 + r_4 &= 0, \\ r'_1\alpha_1 + r'_2\alpha_2 + r'_1r_3\alpha_3 + r'_1r_4 &= 0, \\ \alpha_1 + r_2\alpha_2 + r''_3\alpha_3 + r_4 &= 0,\end{aligned}$$

alors

$$F = (-r_2x_1x_2 - r_3x_2x_3 + k_1x_1x_3 - r_4, x_1x_2 + k_2x_1x_3, x_2x_3 + k_3x_1x_3),$$

où

$$r'_1k_1 + r'_2k_2 + r'_1r_3k_3 = 0, \quad -\frac{k_1 + r_2k_2}{k_3} = r''_3 \quad \text{et } k_3 \neq 0.$$

**Conjecture 0.2.18.** Pour une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  dont le degré de  $F$  est un nombre entier positif quelconque, nous pouvons procéder à l'algorithme décrit dans le théorème 0.2.17 par un programme d'ordinateur pour obtenir les résultats.

## 0.3 L'ensemble $V_F$ des Valette

### 0.3.1 L'ensemble $V_F$ et son homologie (ou homologie d'intersection)

L'ensemble des Valette  $V_F$  est construit par Anna et Guillaume Valette [Va-Va]. Les auteurs ont construit une pseudovariété  $V_F$  associée à une application polynomiale  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Rappelons qu'une pseudovariété  $V$  dans un espace euclidien  $\mathbb{R}^{2n}$  est une variété dont l'ensemble singulier est un sous-ensemble de codimension (réelle) au moins 2 et dans lequel la partie lisse est dense dans  $V$ . Remarquons que nous pouvons considérer  $F$  comme une application  $F : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ . Soit

$$M_F := \mathbb{R}^{2n} \setminus \text{Sing}F,$$

où  $\text{Sing}F$  est l'ensemble des solutions du déterminant jacobien de  $F$ .

**Proposition 0.3.1** ([Va-Va]). *Soit  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application polynomiale. Il existe :*

a) *une pseudovariété semi-algébrique réelle  $V_F \subset \mathbb{R}^{2n+p}$  où  $p > 0$ , telle que*

$$\text{Sing}(V_F) \subset (S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\} \subset \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^p,$$

*où  $K_0(F) := F(\text{Sing}F)$ .*

b) *une application semi-algébrique bi-lipschitzienne :*

$$h_F : M_F \rightarrow V_F \setminus (S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$$

*où  $V_F \setminus (S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$  est équipée de la métrique induite sur  $\mathbb{R}^{2n+p}$ .*

**Remarque 0.3.2.** L'idée pour construire l'ensemble  $V_F$  est comme suit :  $\text{Sing}F$  divise l'espace  $\mathbb{R}^{2n}$  en sous-ensembles ouverts, semi-algébriques  $\{U_i\}_{i=1,\dots,p}$  tels que pour chaque  $U_i$ , l'application  $F$  induit un difféomorphisme. Nous pouvons choisir des sous-ensembles fermés, semi-algébriques  $V_i \subset U_i$  tel que  $\{V_i\}_{i=1,\dots,p}$  est aussi un recouvrement de  $M_F$ . Pour chaque  $V_i$ , d'après le lemme de séparation de Mostowski [Mo], alors il existe une fonction de Nash  $\psi_i : M_F \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\psi_i$  soit positive sur  $V_i$  et négative sur  $M_F \setminus V_i$ . Soit

$$V_F := \overline{(F, \psi_1, \dots, \psi_p)(M_F)}.$$

L'ensemble des Valette  $V_F$  n'est pas unique, il dépend d'un choix de recouvrement de  $M_F$  et du choix des fonctions de Nash. Cependant, les résultats suivants sont valables pour tous les choix de  $V_F$ , nous nous permettrons donc parfois de parler de "*l'ensemble des Valette*". Cela signifiera un choix de l'ensemble  $V_F$  correspondant à un choix de recouvrement de  $M_F$  et de fonctions de Nash.

La proposition 0.3.1 est encore vraie dans le cas réel :

**Proposition 0.3.3** ([NT-V-V, NT1]). *Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application polynomiale. Il existe une variété semi-algébrique réelle  $V_F \subset \mathbb{R}^{n+p}$  où  $p > 0$ , telle que*

$$\text{Sing}(V_F) \subset (S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$$

*et il existe une application bi-lipschitzienne semi-algébrique :*

$$h_F : M_F \rightarrow V_F \setminus (S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$$

*où  $V_F \setminus (S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$  est équipée de la métrique induite sur  $\mathbb{R}^{n+p}$ .*

Nous savons que, pour calculer l'homologie d'intersection de l'ensemble  $V_F$ , nous devons stratifier l'ensemble  $K_0(F) \cup S_F$ . En particulier, si le jacobien de  $F$  est partout non nul, alors  $K_0(F)$  est vide, nous devons donc stratifier seulement l'ensemble  $S_F$ . Cela est l'une des applications des stratifications de l'ensemble  $S_F$  que nous avons construites. Nous notons que, nous pouvons avoir plusieurs méthodes pour stratifier l'ensemble  $S_F$ , par exemple, nous avons le théorème suivant :



**Théorème 0.3.4** ([NT-V-V]). *Soit  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application polynomiale génériquement finie de déterminant jacobien partout non nul. Alors, il existe une filtration naturelle de  $V_F$  :*

$$V_F = V_{2n} \supset V_{2n-1} \supset V_{2n-2} \supset \cdots \supset V_1 \supset V_0 \supset V_{-1} = \emptyset$$

*telle que :*

- 1) *pour tout  $i < n$ , alors  $V_{2i+1} = V_{2i}$ ,*
- 2) *la stratification correspondante satisfait la condition (b) de Whitney.*

Dans le cas  $\mathbb{C}^2$ , Anna et Guillaume Valette ont prouvé que si  $F$  est une application polynomiale de déterminant jacobien partout non nul, alors  $F$  n'est pas propre si et seulement si l'homologie (ou l'homologie d'intersection) de  $V_F$  n'est pas triviale en dimension 2.

**Théorème 0.3.5** ([Va-Va]). *Soit  $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  une application polynomiale de déterminant jacobien partout non nul. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  *$F$  n'est pas propre,*
- (2)  *$H_2(V_F, \mathbb{Q}) \neq 0$ ,*
- (3)  *$IH_2^{\bar{p}}(V_F, \mathbb{Q}) \neq 0$ , pour une perversité (ou toutes les perversités)  $\bar{p}$ .*

Nous pouvons généraliser ce théorème dans le cas  $\mathbb{C}^n$ . Rappelons d'abord qu'une application polynomiale  $F_i : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  peut s'écrire :

$$F_i = \sum_j F_{ij}$$

où  $F_{ij}$  est la partie de degré  $d_j$  dans  $F_i$ . Soit  $d_k$  le degré le plus grand dans  $F_i$ , la forme initiale  $\hat{F}_i$  de  $F_i$  est définie comme

$$\hat{F}_i := F_{ik}.$$

**Théorème 0.3.6** ([NT-V-V]). *Soit  $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application polynomiale de déterminant jacobien partout non nul. Soient  $\hat{F}_i$  les formes initiales respectives des composantes de  $F_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Si  $\text{rang}(D\hat{F}_i)_{i=1, \dots, n} > n - 2$ , alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  *$F$  n'est pas propre,*
- (2)  *$H_2(V_F, \mathbb{Q}) \neq 0$ ,*
- (3)  *$IH_2^{\bar{p}}(V_F, \mathbb{Q}) \neq 0$ , pour une perversité (ou toutes les perversités)  $\bar{p}$ ,*
- (4)  *$IH_{2n-2}^{\bar{p}}(V_F, \mathbb{Q}) \neq 0$ , pour une perversité (ou toutes les perversités)  $\bar{p}$ .*

### 0.3.2 L'ensemble $V_F$ et la conjecture jacobienne

La conjecture jacobienne s'énonce comme suit : “Une application polynomiale  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  de déterminant jacobien partout non nul est un automorphisme polynomial.”

Nous savons qu'une application polynomiale  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  de déterminant jacobien partout non nul est un automorphisme polynomial si et seulement si  $F$  est propre. A l'instar du travail d'Anna et Guillaume Valette, cette étude nous permet d'approcher d'une manière nouvelle la conjecture jacobienne en calculant l'homologie ou l'homologie d'intersection de l'ensemble  $V_F$ .

**Question 0.3.7.** *Pouvons-nous calculer précisément l'homologie d'intersection de l'ensemble  $V_F$  ? Pouvons-nous construire l'ensemble  $V_F$  sans utiliser l'ensemble  $S_F$  ?*

### 0.3.3 Stratifications des ensembles $K_0(F) \cup S_F$ et $K_\infty F$

Pour calculer l'homologie d'intersection de l'ensemble  $V_F$  en général, nous devons stratifier l'ensemble  $K_0(F) \cup S_F$ . Nous avons les faits suivants :

**Proposition 0.3.8.** *En général, l'ensemble  $K_0(F)$  n'est ni fermé, ni lisse.*

L'existence de la stratification de  $S_F \cup K_0(F)$  est justifiée par le résultat suivant :

**Proposition 0.3.9.** *L'ensemble  $S_F \cup K_0(F)$  est fermé.*

**Proposition 0.3.10.** *Il existe une stratification de l'ensemble  $S_F \cup K_0(F)$  compatible avec la stratification de  $S_F$  définie par  $\Xi$ .*

**Conjecture 0.3.11.** *Les ensembles  $S_F \cup K_0(F)$  et  $K_0(F) \setminus S_F$  sont de dimension pure.*

L'ensemble  $K_\infty(F)$  des valeurs critiques asymptotiques d'une application polynomiale  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  est défini par

$$K_\infty(F) = \{\alpha \in \mathbb{C}^n : \exists \xi_k \subset \mathbb{C}^n, |\xi_k| \rightarrow \infty \\ \text{telle que } F(\xi_k) \rightarrow \alpha \text{ et } (1 + |\xi_k|)\nu(dF(\xi_k)) \rightarrow 0\}$$

où  $\nu$  est la fonction de Rabier, c'est-à-dire la distance à l'ensemble singulier des opérateurs. Nous voyons que  $K_\infty(F)$  est un sous-ensemble de l'ensemble de Jelonek  $S_F$ . Nous avons donc une stratification “définie par les façons” de l'ensemble  $K_\infty F$ . Par ailleurs, dans leur article, “*Semi-algebraic Sard Theorem for generalized critical values*”, K. Kurdyka, P. Orro et S. Simon [KPS] ont prouvé que pour une application  $\mathcal{C}^1$  semi-algébrique  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et ainsi pour une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  de fibres régulières compactes, alors  $K_\infty F = S_F$ . Donc dans ces cas, une stratification de  $K_\infty F$  est bien une stratification de  $S_F$ .

**Conjecture 0.3.12.** *La stratification de l'ensemble  $K_\infty F$  définie par les façons est plus fine que la stratification de  $S_F$  définie par les façons.*

Soit  $F : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ , où  $m, n > 1$  une application polynomiale, l'ensemble  $B(F)$  de bifurcation de  $F$  est le plus petit ensemble fermé  $Y$  tel que

$$F : \mathbb{K}^m \setminus F^{-1}(Y) \rightarrow \mathbb{K}^n \setminus Y$$

est une fibration sur chaque composante connexe de  $\mathbb{K}^n \setminus Y$ . En général, l'ensemble  $B(F)$  est plus grand que l'ensemble  $K_0(F)$ . Il contient aussi l'ensemble des points de bifurcation à l'infini  $B_\infty(F)$ . De manière précise, l'ensemble  $B_\infty(F)$  consiste en les points où l'application  $F$  n'est pas une fibration localement triviale à l'infini (*i.e.* en dehors d'une grande boule).

Soit

$$K(F) := K_0(F) \cup K_\infty(F).$$

Nous avons les faits suivants :

- 1) Dans [Pa1, Pa2], Parusiński a prouvé qu'en général,  $B_\infty(F) \subset K_\infty(F)$ .
- 2)  $B(F) \subset K(F)$  (voir par exemple [JK]).

En utilisant la stratification de l'ensemble  $S_F$ , définie par les façons, nous obtenons des stratifications de ces ensembles.

L'ensemble de test (appelé *testing set* dans [J2]) des applications polynomiales est défini par Jelonek de la manière suivante :

**Définition 0.3.13.** [J2] *Une variété algébrique  $S \subset Y$  est appelé ensemble de test des applications polynomiales  $F : X \rightarrow Y$  si pour tout application polynomiale génériquement finie  $F : X \rightarrow Y$ , si  $\text{res}_{F^{-1}(S)} F : F^{-1}(S) \rightarrow S$  est propre, alors  $F$  est propre.*

L'ensemble de test joue un rôle important pour vérifier qu'une application polynomiale est propre, sans avoir besoin de connaître l'ensemble  $S_F$ . Nous conjecturons que :

**Conjecture 0.3.14.** *Il existe une stratification, définie par les façons, de l'ensemble de test des applications polynomiales  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ .*

# Chapitre 1. Rappels sur les applications

## 1.1 Application propre

Dans toute la suite,  $\mathbb{K}$  désignera le corps des nombres réels  $\mathbb{R}$  ou celui des nombres complexes  $\mathbb{C}$ . Nous considérons la norme euclidienne usuelle dans  $\mathbb{K}^n$ , c'est-à-dire, la norme  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ , pour un élément  $x = (x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{K}^n$ . La topologie de  $\mathbb{K}^n$  sera la topologie induite par la norme euclidienne.

**Définition 1.1.1.** Une application continue  $F : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$  est dite *propre* si pour tout ensemble compact  $A \subset \mathbb{K}^n$ , l'ensemble  $F^{-1}(A)$  est compact dans  $\mathbb{K}^m$ .

Nous disons que l'application continue  $F$  satisfait à la condition “Hadamard” si  $\|F(x)\|_{\mathbb{K}^n}$  tend vers l'infini lorsque  $x$  tend vers l'infini. Ici,  $x$  tend vers l'infini signifie que  $\|x\|$  tend vers l'infini, c'est-à-dire que l'une des coordonnées de  $x$  au moins tend vers l'infini.

**Proposition 1.1.2.** [Al] Soit  $F : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$  une application continue satisfaisant à la condition “Hadamard”, alors  $F$  est propre.

**Définition 1.1.3.** Soit  $F : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$  une application polynomiale. Nous disons que  $F$  est *propre en*  $a$  s'il existe un voisinage compact  $A$  de  $a$  tel que  $F^{-1}(A)$  soit compact. S'il n'existe pas de tel voisinage, nous disons que  $F$  *n'est pas propre en*  $a$ .

Nous notons  $S_F$  l'ensemble des points  $a$  de  $\mathbb{K}^n$  pour lesquels l'application  $F$  n'est pas propre en  $a$ . L'ensemble  $S_F$  est encore appelé *ensemble asymptotique* ou *ensemble de Jelonek*.

**Lemme 1.1.4.** L'application polynomiale  $F : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$  n'est pas propre en  $a \in \mathbb{K}^n$  si et seulement s'il existe une suite  $\{\xi_k\} \subset \mathbb{K}^m$  telle que  $\|\xi_k\|$  tend vers l'infini et  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$ .

Notons que si une suite  $\{\xi_k\} \subset \mathbb{K}^m$  est telle que  $\|\xi_k\|$  tend vers l'infini, alors nous disons aussi que la suite  $\{\xi_k\}$  tend vers l'infini et nous notons  $\xi_k \rightarrow \infty$ . Cela signifie qu'il existe au moins une coordonnée de  $\{\xi_k\}$  tendant vers l'infini.

Notons aussi que, dans le lemme 1.1.4, nous pouvons nous restreindre aux suites  $\{\xi_k\}$  tendant vers l'infini telles que chaque coordonnée ou bien tend vers l'infini ou bien converge.

L'ensemble  $S_F$  indique dans quelle mesure l'application  $F$  diffère d'une application propre. En particulier,  $F$  est propre si et seulement si cet ensemble est vide. De plus,  $S_F$  est l'ensemble minimal  $S$  tel que l'application  $F : \mathbb{K}^m \setminus F^{-1}(S) \rightarrow \mathbb{K}^n \setminus S$  soit propre.

**Exemple 1.1.5.** Soit  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2)}^2 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2$  telle que  $F(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2)$ . Alors  $F$  est propre et  $S_F = \emptyset$ .

**Exemple 1.1.6.** Soit  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2)}^2 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2$  telle que  $F(x_1, x_2) = (x_1, x_1 x_2)$ . Alors  $F$  n'est pas propre et  $S_F = \{\alpha_1 = 0\} \simeq \mathbb{C}$ . En effet, pour un point  $(0, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$  il existe une suite  $\{\xi_k\} = \{(\frac{1}{k}, k\alpha_2)\}$  telle que  $\xi_k$  tend vers l'infini et  $F(\xi_k) = (\frac{1}{k}, \alpha_2)$  tend vers  $(0, \alpha_2)$ .

**Exemple 1.1.7.** Considérons l'application  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  définie par  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 x_3, x_3 x_1)$ . Alors  $F$  n'est pas propre et  $S_F = S_{F_1} \cup S_{F_2}$ , où :

i)  $S_{F_1} = \{(0, \alpha_2, \alpha_3)\} \simeq \mathbb{C}^2$ . En effet, considérons un point  $a = (0, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{C}^3$ . Si  $\alpha_3 \neq 0$ , considérons la suite  $\{\xi_k\} = \{(\frac{1}{k}, \frac{\alpha_2}{k\alpha_3}, k\alpha_3)\}$  et si  $\alpha_3 = 0$  considérons la suite  $\{\xi_k\} = \{(\frac{1}{k}, k\alpha_2, \frac{1}{k})\}$ . Dans les deux cas  $\xi_k$  tend vers l'infini et  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$ .

ii)  $S_{F_2} = \{(\alpha_1, \alpha_2, 0)\} \simeq \mathbb{C}^2$ . En effet, considérons un point  $a = (\alpha_1, \alpha_2, 0) \in \mathbb{C}^3$ , alors il existe une suite  $\{\xi_k\} = \{(\alpha_1, k\alpha_2, \frac{1}{k})\}$  telle que  $\xi_k$  tend vers l'infini et  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$ .

**Exemple 1.1.8.** Considérons l'application  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  définie par  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 x_2, x_1(x_1 - 1)x_3)$ . Alors  $F$  n'est pas propre et  $S_F$  est réunion de deux plans parallèles :  $S_F = \{\alpha_1 = 0\} \cup \{\alpha_1 = 1\}$ .

Rappelons qu'une courbe  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{K}^m$  tend vers l'infini s'il existe au moins une coordonnées  $\gamma_i(t)$  tendant vers l'infini lorsque  $t$  tend vers l'infini.

**Proposition 1.1.9.** La propriété de "propreté" peut donc se caractériser des deux manières suivantes :

1) L'application polynomiale  $F : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$  n'est pas propre en  $a \in \mathbb{K}^n$  si et seulement s'il existe une courbe  $\gamma : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{K}^m$  tendant vers l'infini et telle que  $F \circ \gamma$  tend vers  $a$ .

2) L'application polynomiale  $F : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$  n'est pas propre en  $a \in \mathbb{K}^n$  si et seulement s'il existe une suite  $\{\xi_k\}$  tendant vers l'infini et telle que  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$ .

**Remarque 1.1.10.** En général, nous avons  $F(\mathbb{K}^m) \cap S_F \neq \emptyset$ . Par exemple, considérons l'application  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  telle que  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^3 - x_1 x_2 x_3, x_2 x_3, x_3 x_1)$ . Alors  $S_F$  est l'union  $\{\alpha_1 = 0\} \cup \{\alpha_2 = 0\}$  et

$$F(\mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3) \cap S_F = ([ (0\alpha_2\alpha_3) \cup 0\alpha_1 ] \setminus 0\alpha_3) \cup \{0\}.$$

## 1.2 Application dominante

**Définition 1.2.1.** L'application polynomiale  $F : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$  est dite *dominante* si l'adhérence de l'image  $F(\mathbb{K}^m)$  est  $\mathbb{K}^n$ , c'est-à-dire,  $\overline{F(\mathbb{K}^m)} = \mathbb{K}^n$ .

**Remarque 1.2.2.** Une application polynomiale  $F : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$  est dominante si et seulement si pour tout  $a \in \mathbb{K}^n$ , il existe une suite  $\{\xi_k\} \subset \mathbb{K}^m$  telle que  $F(\xi_k)$  tende vers  $a$ . Puisque l'ensemble  $S_F$  est contenu dans l'adhérence de l'ensemble  $F(\mathbb{K}^m)$  et

$$S_F = \overline{F(\mathbb{K}^m)} \setminus \{a \in \overline{F(\mathbb{K}^m)} : \forall \{\xi_k\} \subset \mathbb{K}^m, F(\xi_k) \rightarrow a, \xi_k \text{ ne tend pas vers l'infini}\},$$

nous pouvons donc déterminer l'ensemble  $S_F$  d'une application continue dominante, puisque, dans ce cas,

$$S_F = \mathbb{K}^n \setminus \{a \in \mathbb{K}^n : \forall \{\xi_k\} \subset \mathbb{K}^m, F(\xi_k) \rightarrow a, \xi_k \text{ ne tend pas vers l'infini}\}.$$

Remarquons que la détermination de l'ensemble  $S_F$  permet aussi de montrer le caractère dominant de l'application  $F$  :

**Lemme 1.2.3.** [NT1] Nous avons

$$\overline{F(\mathbb{K}^m)} = S_F \cup F(\mathbb{K}^m).$$

*Démonstration.* Si  $a \in \overline{F(\mathbb{K}^m)}$  alors  $a \in F(\mathbb{K}^m)$  ou  $a \in \overline{F(\mathbb{K}^m)} \setminus F(\mathbb{K}^m)$ . Si  $a \in \overline{F(\mathbb{K}^m)} \setminus F(\mathbb{K}^m)$  alors il existe une suite  $\{\xi_k\} \subset \mathbb{K}^m$  telle que  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$ . Si  $\xi_k$  ne tend pas vers l'infini, alors  $\xi_k$  tend vers  $a' \in \mathbb{K}^m$ . Puisque  $F$  est une application polynomiale alors  $F(\xi_k)$  tend vers  $F(a')$  et  $F(a') = a$ . Donc  $a \in F(\mathbb{K}^m)$ , d'où la contradiction avec  $a \in \overline{F(\mathbb{K}^m)} \setminus F(\mathbb{K}^m)$ . Donc  $\xi_k$  tend vers l'infini et  $a \in S_F$ . Alors, nous avons

$$\overline{F(\mathbb{K}^m)} = S_F \cup F(\mathbb{K}^m).$$

□

Le lemme 1.2.3 montre que si, pour tout  $a \in \mathbb{K}^n \setminus S_F$ , nous avons  $a \in F(\mathbb{K}^m)$ , c'est-à-dire  $F^{-1}(a)$  n'est pas vide, alors  $F$  est dominante.

Cependant, il n'y a pas de relation entre les propriétés de dominance et de propreté, comme le montrent les exemples suivants :

**Exemple 1.2.4.** Soit l'application polynomiale  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2)}^2 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2$  telle que  $F = (x_1, x_1^2)$ , alors  $F$  est dominante et  $F$  est aussi propre.

**Exemple 1.2.5.** Soit l'application polynomiale  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  telle que  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2, x_2 x_3, x_3 x_1)$ . Alors  $F$  n'est pas propre et  $S_F = \{(\alpha_1, \alpha_2, 0)\} \cup \{(\alpha_1, 0, \alpha_3)\} \cup \{(0, \alpha_2, \alpha_3)\} \subset \mathbb{C}^3$ . L'application  $F$  est dominante puisque pour un

point  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus S_F$ , les trois coordonnées  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  ne sont pas nulles, donc le système d'équations

$$x_1x_2 = \alpha_1, \quad x_2x_3 = \alpha_2, \quad x_3x_1 = \alpha_3$$

admet toujours des solutions. Nous en déduisons  $a \in F(\mathbb{C}^3)$ , donc  $F$  est dominante.

**Exemple 1.2.6.** Soit l'application polynomiale  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2)}^2 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2$  telle que  $F(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ , alors  $F$  est propre mais  $F$  n'est pas dominante.

**Exemple 1.2.7.** Soit l'application polynomiale  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3, x_4)}^4 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)}^4$  telle que  $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_1)$ , alors  $F$  n'est ni dominante ni propre. En effet,

- i)  $F$  n'est pas propre et  $S_F$  est une hypersurface dont l'équation est  $\alpha_1\alpha_3 = \alpha_2\alpha_4$ .
- ii)  $F$  n'est pas dominante. En effet, si  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in F(\mathbb{C}^4)$ , alors

$$\alpha_1 = x_1x_2, \quad \alpha_2 = x_2x_3, \quad \alpha_3 = x_3x_4, \quad \alpha_4 = x_4x_1.$$

Donc,  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = (x_1x_2x_3x_4)^2$  et  $\alpha_1\alpha_3 = x_1x_2x_3x_4$ . Ce qui implique  $\alpha_1\alpha_3 = \alpha_2\alpha_4$ . Si nous prenons  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{C}^4$  tel que  $\alpha_1\alpha_3 \neq \alpha_2\alpha_4$ , alors  $a$  n'est ni dans  $S_F$  ni dans  $F(\mathbb{C}^4)$  et  $F$  n'est donc pas dominante.

**Remarque 1.2.8.** Une application surjective est dominante, mais l'inverse n'est pas vrai.

**Exemple 1.2.9.** Considérons l'application  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  définie par  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1)$ . Alors  $F$  est dominante mais  $F$  n'est pas surjective. En effet, le point  $(0, 1, 1)$  n'est pas dans l'image de  $F$ .

Les exemples 1.2.5 et 1.2.7 se généralisent de la façon suivante :

**Exemple 1.2.10.** Soit  $n \geq 3$  et  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, \dots, x_n)}^n \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}^n$  définie par

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_nx_1).$$

i) Si  $n$  est impair, alors  $F$  n'est pas propre mais est dominante avec  $S_F = \bigcup_{i=1}^n \{\alpha_i = 0\}$ .

ii) Si  $n = 2k$  est pair, alors  $F$  n'est ni dominante, ni propre et  $S_F$  est un cône dont l'équation est  $\alpha_1\alpha_3 \dots \alpha_{n-1} = \alpha_2\alpha_4 \dots \alpha_n$ .

*Démonstration.* i) Si  $n$  est impair, pour tout  $a \in S_F$ , il existe une suite  $\{\xi_k\} \subset \mathbb{C}^n$  telle que  $\xi_k$  tende vers l'infini et  $F(\xi_k)$  tende vers  $a$ . De façon précise, par exemple si  $a = (0, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ , nous pouvons prendre la suite

$$\{\xi_k\} = \left\{ \left( \frac{1}{k}, \frac{\alpha_2\alpha_4 \dots \alpha_{n-1}}{k\alpha_3\alpha_5 \dots \alpha_n}, \dots, \frac{\alpha_{n-1}}{k\alpha_n}, k\alpha_n \right) \right\}.$$

ii) Si  $n$  est pair, alors  
a)  $F$  n'est pas propre et l'ensemble  $S_F$  est le cône  $\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_{n-1} = \alpha_2\alpha_4\ldots\alpha_n$ .  
En fait, pour un point  $a \in S_F$ , nous prenons (par exemple) la suite  $\{\xi_k\}$  telle que

$$\xi_k = \left( k\alpha_1, \frac{1}{k}, k\alpha_2, \frac{\alpha_3}{k\alpha_2}, \frac{k\alpha_2\alpha_4}{\alpha_3}, \dots, \frac{\alpha_3\alpha_5\ldots\alpha_{n-1}}{k\alpha_2\alpha_4\ldots\alpha_{n-2}} \right).$$

Alors  $\xi_k$  tend vers l'infini et  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$ .

b)  $F$  n'est pas dominante, en effet soit  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in F(\mathbb{C}^n)$ , alors

$$\begin{cases} \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n = (x_1x_2\ldots x_n)^2 \\ \alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_{n-1} = x_1x_2\ldots x_n. \end{cases}$$

Donc,  $\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_{n-1} = \alpha_2\alpha_4\ldots\alpha_n$ . Un point  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$  tel que  $\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_{n-1} \neq \alpha_2\alpha_4\ldots\alpha_n$ , n'est ni dans  $S_F$ , ni dans  $F(\mathbb{C}^n)$  donc  $a \notin \overline{F(\mathbb{C}^n)}$ .  $\square$

**Exemple 1.2.11.** Soit l'application  $F : \mathbb{C}_{(x_1, \dots, x_n)}^n \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}^n$  telle que

$$F(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, \dots, x_1x_2\ldots x_n).$$

Alors l'ensemble  $S_F$  est la réunion  $\bigcup_{i=1}^{n-1} \{\alpha_i = 0\}$  et  $F$  est dominante.

*Démonstration.* Pour chaque plan  $\{\alpha_i = 0\}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , nous pouvons choisir la suite  $\{\xi_k\} = \{(x_{1,k}, \dots, x_{n,k})\}$  telle que

$$x_{i,k} = \frac{1}{k}, \quad x_{i+1,k} = kc_{i+1}, \quad x_{j,k} = c_j, \quad \forall j \neq i, i+1,$$

où  $c_l \in \mathbb{C}$ , avec  $l = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ . L'application  $F$  est dominante puisque, pour tout point  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}$  tel que  $\alpha_1 \neq 0, \dots, \alpha_{n-1} \neq 0$ , alors  $F^{-1}(a) \neq \emptyset$ .  $\square$

**Lemme 1.2.12.** [NT1] Soit  $F = (F_1, F_2, \dots, F_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application polynomiale dominante. Alors, les polynômes  $F_1, F_2, \dots, F_n$  sont indépendants.

*Démonstration.* Supposons que  $F_n = f(F_1, F_2, \dots, F_{n-1})$ , alors l'image de  $F(\mathbb{C}^n)$  a une dimension plus petite que  $n$ .  $\square$

## 1.3 Application finie, génériquement finie

**Définition 1.3.1.** Soit  $F : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$  une application polynomiale. Nous disons que  $F$  est *finie* si pour tout  $a \in \mathbb{K}^n$ , la fibre  $F^{-1}(a)$  est finie.



**Définition 1.3.2.** Soit  $F : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$  une application polynomiale. Nous disons que  $F$  est *génériquement finie* s'il existe un ensemble  $U \subset \mathbb{K}^n$  dense dans  $\mathbb{K}^n$  tel que pour tout  $a \in U$  la fibre  $F^{-1}(a)$  est finie.

**Remarque 1.3.3.** Si  $F$  est finie, alors  $F$  est génériquement finie mais l'inverse n'est pas vrai.

**Exemple 1.3.4.** Soit l'application polynomiale  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  telle que  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1)$ . Alors

i)  $F$  est génériquement finie. En effet, soit  $U = \mathbb{C}^3 \setminus (0x_1 \cup 0x_2 \cup 0x_3)$ . Alors,  $\overline{U} = \mathbb{C}^3$  et pour tout  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in U$ , le système d'équations :

$$\begin{cases} x_1x_2 = \alpha_1 \neq 0 \\ x_2x_3 = \alpha_2 \neq 0 \\ x_3x_1 = \alpha_3 \neq 0 \end{cases}$$

admet un nombre fini de solutions.

ii)  $F$  n'est pas finie. En effet, pour un point  $a = (0, \alpha_2, 0) \in \mathbb{C}^3$  la fibre  $F^{-1}(a)$  consiste de tous les points  $\{(0, \lambda, \frac{\alpha_2}{\lambda})\}$  où  $\lambda$  est un nombre complexe non nul. Donc  $F^{-1}(a)$  est infinie.

**Lemme 1.3.5.** Soit  $F : \mathbb{C}_x^n \rightarrow \mathbb{C}_\alpha^n$  une application polynomiale. Si  $F$  est dominante alors  $F$  est génériquement finie.

*Démonstration.* Par le lemme 1.2.3, puisque  $F$  est dominante, alors

$$\mathbb{C}_\alpha^n = \overline{F(\mathbb{C}_x^n)} = F(\mathbb{C}_x^n) \cup S_F.$$

Soit  $U = \mathbb{C}_\alpha^n \setminus S_F$ . Par la proposition 7 de Jelonek [J1] (voir le théorème 2.3.2, page 34), alors  $S_F$  est un ensemble algébrique de dimension  $n - 1$ . L'ensemble  $U$  est donc dense dans  $\mathbb{C}^n$ . Un point  $\alpha$  dans  $U$  est donc un point générique de  $\mathbb{C}_\alpha^n$  pour l'application polynomiale  $F$  qui est propre en ce point. Puisque  $\alpha \in F(\mathbb{C}^n)$  et  $F$  est une application polynomiale de  $\mathbb{C}^n$  dans  $\mathbb{C}^n$ , alors le cardinal de  $f^{-1}(\alpha)$  est fini (voir aussi la proposition 6 dans [J1]), ce qui nous conduit au résultat.  $\square$

**Remarque 1.3.6.** L'assertion inverse du lemme 1.3.5 n'est pas vraie comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 1.3.7.** L'application  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3, x_4)}^4 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)}^4$  définie par

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_1)$$

est génériquement finie ( $U = \mathbb{C}^4 \setminus (0x_1 \cup 0x_2 \cup 0x_3 \cup 0x_4)$ ), mais n'est pas dominante (puisque  $(1, 1, 1, 0) \notin F(\mathbb{C}^4)$ ).

## 1.4 Application polynomiale de déterminant jacobien partout non nul

**Définition 1.4.1.** Nous disons que l'application polynomiale  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  est de déterminant jacobien partout non nul, ou satisfait à la condition de la conjecture jacobienne, si le déterminant jacobien de  $F$  au point  $x \in \mathbb{C}^n$  n'est pas nul, c'est-à-dire

$$|J_F(x)| := \left| \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j=1,\dots,n} \right| = \text{const.} \neq 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{C}^n.$$

**Remarque 1.4.2.** Si  $F$  est une application de déterminant jacobien partout non nul, alors  $F$  est dominante. En effet, si l'application  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  est de déterminant jacobien partout non nul, alors  $F$  est nondégénérée (c'est-à-dire  $\text{Sing} F \neq \mathbb{C}^n$ ). Son image est donc de dimension complexe  $n$  et est un sous-ensemble Zariski de dimension  $n$  constructible de  $\mathbb{C}^n$ . C'est donc un ensemble ouvert de Zariski de  $\mathbb{C}^n$ , qui est nécessairement dense. Donc  $F$  est dominante.

**Exemple 1.4.3.** L'assertion inverse de la remarque 1.4.2 n'est pas vraie. En effet, l'application polynomiale  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2)}^2 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2$  où  $F(x_1, x_2) = (x_1, x_1 x_2)$  est dominante mais n'est pas de déterminant jacobien partout non nul, puisque  $|J_F(x_1, x_2)| = x_1$ .

## 1.5 Application lipschitzienne

**Définition 1.5.1.** Soient  $(E, d_E)$  et  $(E', d_{E'})$  deux espaces métriques,  $F : E \rightarrow E'$  une application et  $k$  un réel strictement positif. Nous disons que  $F$  est  $k$ -lipschitzienne si

$$\forall (x, x') \in E^2, \quad d_{E'}(F(x), F(x')) \leq k d_E(x, x').$$

En particulier, soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  (non vide et non réduit à un point),  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application et  $k$  un réel strictement positif. Alors  $F$  est  $k$ -lipschitzienne si

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |F(x) - F(y)| \leq k|x - y|.$$

**Définition 1.5.2.** L'application  $F$  est dite *lipschitzienne* s'il existe  $k > 0$  tel que  $F$  soit  $k$ -lipschitzienne.

Le plus petit  $k$  tel que  $F$  soit  $k$ -lipschitzienne est appelé *constante de Lipschitz* de  $F$ .

S'il existe  $k \geq 1$  tel que

$$\frac{1}{k} d_X(x_1, x_2) \leq d_Y(F(x_1), F(x_2)) \leq k d_X(x_1, x_2),$$

alors  $F$  est dite *bilipschitzienne*.

**Remarque 1.5.3.** *i)* Toute fonction lipschitzienne est continue, et même uniformément continue.

*ii)* Une fonction  $F$  dérivable est lipschitzienne si et seulement si sa dérivée est bornée.

**Exemple 1.5.4.** *i)* Toute fonction (à valeurs réelles) continûment dérivable sur un intervalle réel fermé borné est lipschitzienne.

*ii)* La fonction  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F(x) = \sqrt{x}$  n'est pas lipschitzienne. Nous pouvons en effet démontrer directement que pour  $x > 0$ , nous avons  $(F(x) - F(0))/x = 1/\sqrt{x}$ , qui n'est pas bornée au voisinage de  $x = 0$ . Nous pouvons aussi le démontrer en utilisant la contraposée du théorème sur la dérivée d'une fonction lipschitzienne : la restriction de  $F$  à  $]0, 1]$  est dérivable ; sa dérivée est  $x \mapsto 1/(2\sqrt{x})$  qui n'est pas bornée sur  $]0, 1]$ , donc cette restriction de  $F$  n'est pas lipschitzienne ; a fortiori,  $F$  ne l'est pas non plus.

# Chapitre 2. Rappels sur les variétés

## 2.1 Pseudovariété

D'abord, rappelons qu'un point régulier  $x$  dans un espace  $X$  est un point admettant un voisinage homéomorphe à un sous-ensemble ouvert dans un espace euclidien  $\mathbb{R}^k$ . Nous disons que  $k$  est la dimension de  $X$  en  $x$ . Un point singulier est un point qui n'est pas régulier. Si tous les points réguliers de l'espace  $X$  ont la même dimension  $k$  alors nous disons que la variété  $X$  est de dimension pure  $k$ .

Rappelons aussi que si  $Y$  est une variété singulière, nous entendons par  $\dim Y$  la plus grande des dimensions des strates de  $Y$ , pour une stratification (quelconque) de  $Y$  (voir la partie 2.4, page 35).

Il existe diverses définitions de pseudovariété. Nous utiliserons la définition suivante (qui se définit par induction) :

**Définition 2.1.1.** (*Définition topologique*) Un espace topologique  $X$  non vide, paracompact et Hausdorff est dit *une  $n$ -pseudovariété* s'il existe une sous-pseudovariété  $Y \subset X$  tel que :

- (i)  $X \setminus Y$  est une variété topologique connexe de dimension  $n$ , dense dans  $X$ ,
- (ii)  $\dim Y \leq n - 2$ .

Le sous-espace  $Y$  de la pseudovariété  $X$  contient le sous-ensemble  $Sing X$  des points singuliers de  $X$ .

## 2.2 Variétés uniréglées

**Définition 2.2.1.** Nous disons qu'une variété affine irréductible  $V$  est  $\mathbb{K}$ -uniréglée si pour tout  $x \in V$ , il existe un morphisme non constant  $\varphi_x : \mathbb{K} \rightarrow V$  tel que  $\varphi_x(0) = x$ .

En d'autres termes, cela signifie que par chaque point de  $V$  passe une courbe rationnelle contenue dans  $V$ .

**Exemple 2.2.2.** Dans  $\mathbb{R}^3$ , le paraboloïde elliptique d'équation  $z = x^2 - y^2$  est une surface uniréglée.

## 2.3 Quelques résultats importants sur l'ensemble $S_F$

L'une des raisons pour étudier l'ensemble  $S_F$  est sa relation à la conjecture jacobienne. Rappelons cette célèbre conjecture : en 1939, O.H. Keller a posé la question suivante :

*Est-ce qu'une application polynomiale  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  de déterminant jacobien partout non nul est un automorphisme polynomial ?*

Soit  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application polynomiale de déterminant jacobien partout non nul, alors  $F$  est un automorphisme si et seulement si  $F$  est propre. Dans l'approche topologique, la difficulté principale est de savoir comment vérifier que l'application est propre. Il est donc naturel d'étudier la topologie de l'ensemble  $S_F$ . Dans les années 90, Z. Jelonek a étudié les propriétés de cet ensemble.

Nous donnons ici quelques propriétés de l'ensemble  $S_F$ , lesquelles sont des résultats ou bien dûs à Jelonek ou qui découlent directement de ses résultats. Notons qu'au chapitre 6, nous donnerons davantage de propriétés de l'ensemble  $S_F$ .

Soit l'application  $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Considérons le graphe de  $F$  dans  $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ , c'est-à-dire

$$\text{graphe}F = \{(a, F(a)) : a \in \mathbb{C}^m\} \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n.$$

Nous savons que  $S_F \subset \overline{F(\mathbb{C}^m)}$ . Pour caractériser l'ensemble  $S_F$ , nous sommes donc amenés à considérer l'adhérence du graphe de  $F$  dans  $\mathbb{CP}^m \times \mathbb{C}^n$ . Notons  $\pi_2$  la projection canonique

$$\pi_2 : \mathbb{CP}^m \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n.$$

Le point de départ de l'étude de Jelonek est l'observation suivante (voir l'introduction de [Va-Va]) :

**Proposition 2.3.1.** *L'ensemble asymptotique  $S_F$  d'une application  $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$  est l'image de l'ensemble  $\overline{\text{graphe}F} \setminus \text{graphe}F$  par la projection canonique  $\pi_2$ .*

Nous donnons ici une preuve de cette assertion :

*Démonstration.* [NT1] Montrons l'inclusion  $S_F \subset \pi_2(\overline{\text{graphe}F} \setminus \text{graphe}F)$ . Soit  $a' \in S_F$ , il existe une suite  $\{\xi_k\} \subset \mathbb{C}^m$  telle que  $\xi_k$  tend vers l'infini et  $F(\xi_k)$  tend vers  $a'$ . La limite de la suite  $\{(\xi_k, F(\xi_k))\}$  est  $a^* = (\infty, a')$ , où  $a^* \in \overline{\text{graphe}F} \setminus \text{graphe}F \subset (\mathbb{CP}^m \times \mathbb{C}^n)$  et  $a' = \pi_2(a^*) \in \pi_2(\overline{\text{graphe}F} \setminus \text{graphe}F)$ .

Inversement, soit un point  $a' \in \pi_2(\overline{\text{graphe}F} \setminus \text{graphe}F)$ , il existe  $a^* = (a, a') \in \overline{\text{graphe}F} \setminus \text{graphe}F$  tel que  $a^* \in \overline{\text{graphe}F}$  mais  $a^* \notin \text{graphe}F$ . Alors nous avons  $a' \neq F(a)$ . Par ailleurs, il existe une suite  $\{(\xi_k, F(\xi_k))\} \subset \text{graphe}F$  telle que  $(\xi_k, F(\xi_k))$  tende vers  $(a, a')$ . Donc la suite  $\xi_k$  tend vers  $a$  et  $F(\xi_k)$  tend vers  $a'$ . Puisque  $F$  est une application polynomiale,  $F$  est continue et donc  $F(\xi_k)$  tend vers  $F(a)$ . Mais  $a' \neq F(a)$ , donc  $a = \infty$ , et  $\xi_k$  tend vers l'infini. Alors nous avons  $a' \in S_F$ .  $\square$

Nous utiliserons plus tard la description suivante de l'ensemble  $S_F$  due à Jelonek :

**Théorème 2.3.2.** [J1] *Soit  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application polynomiale dominante et  $\mathbb{C}(F_1, \dots, F_n) \subset \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$  une extension de corps. Pour chaque  $i$ , soit une équation irréductible de  $x_i$  sur  $\mathbb{C}[F_1, \dots, F_n]$*

$$\sum_{k=0}^{n_i} \phi_k^i(F) x_i^{n_i-k} = 0,$$

où les  $\phi_k^i$  sont des polynômes. Alors nous avons

$$S_F = \bigcup_{i=1}^n \{a \in \mathbb{C}^n : \phi_0^i(a) = 0\}.$$

De plus, l'ensemble  $S_F$  est vide ou une hypersurface  $\mathbb{C}$ -uniréglée de dimension  $n - 1$ .

Jelonek montre plus généralement le théorème suivant :

**Théorème 2.3.3.** [J1] Si  $F : X \rightarrow Y$  est une application polynomiale dominante de variétés affines lisses de même dimension, alors l'ensemble des points où  $F$  n'est pas propre est vide ou est une hypersurface.

**Exemple 2.3.4.** L'application polynomiale  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  définie par  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1)$  est dominante et  $S_F = \{(\alpha_1, \alpha_2, 0)\} \cup \{(\alpha_1, 0, \alpha_3)\} \cup \{(0, \alpha_2, \alpha_3)\}$ . Alors,  $\dim S_F = 2$  et  $S_F$  est une hypersurface  $\mathbb{C}$ -uniréglée.

**Remarque 2.3.5.** Dans le cas réel, pour une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , l'ensemble de Jelonek est un ensemble semi-algébrique  $\mathbb{R}$ -uniréglé mais nous n'avons aucune indication sur sa dimension réelle : celle-ci peut être n'importe quel nombre compris entre 1 et  $n - 1$ .

## 2.4 Stratifications

En chaque point d'une variété différentiable de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , nous pouvons définir un espace tangent. Ceci n'est plus vrai pour une variété singulière. Les points pour lesquels nous ne pouvons pas définir un espace tangent sont précisément les points singuliers. La partie singulière peut être très compliquée. C'est la raison pour laquelle nous sommes intéressés à stratifier une variété singulière, c'est-à-dire à la subdiviser en sous-variétés lisses, appelées les strates, de telle sorte que nous pouvons expliciter la complexité de la variété singulière le long des strates en décrivant la façon dont les strates se recollent pour la former.

Il y a plusieurs façon de stratifier une variété singulière, ce qui correspond à des conditions différentes sur le recollement, par exemple celles dues à Thom, Mather, Whitney, Hironaka, Teissier, Kuo ou Verdier. Ici, nous considérerons seulement les stratifications de Whitney et de Thom-Mather.

**Définition 2.4.1.** Soit  $V \subset \mathbb{R}^n$  un sous-ensemble fermé. Nous disons que  $V$  est *stratifié* s'il existe une collection localement finie de sous-ensembles disjoints  $S_i, i \in I$  tels que

$$(1) \quad V = \bigcup S_i,$$

(2) Chaque  $S_i$  est une sous-variété lisse de  $\mathbb{R}^n$  connexe localement fermée dont nous noterons  $\dim(S_i)$  la dimension,

(3)  $S_i \cap \overline{S_j}$  n'est pas vide si et seulement si  $S_i \subset \overline{S_j}$ , et cela arrive si et seulement si  $i = j$  ou  $\dim(S_i) < \dim(S_j)$  (axiome de la frontière),

Les sous-variétés  $S_i$  sont appelées strates.

La décomposition ci-dessus est appelée une stratification de l'ensemble  $V$ .

**Remarque 2.4.2.** Puisque  $V$  est fermé, l'axiome de la frontière implique que l'adhérence de chaque strate est une union de strates de dimensions inférieures.

Nous avons aussi la définition équivalente suivante :

**Définition 2.4.3.** (voir par exemple [Br1]) Une stratification  $\mathcal{S}$  d'un espace  $V$  est la donnée d'une filtration

$$V = V_n \supseteq V_{n-1} \supseteq V_{n-2} \supseteq \cdots \supseteq V_1 \supseteq V_0 \supseteq V_{-1} = \emptyset \quad (\mathcal{S})$$

de  $V$  telle que toutes les différences  $X_\alpha = V_\alpha \setminus V_{\alpha-1}$  sont ou bien vides ou bien une union localement finie de sous-variétés lisses connexes et localement fermées de dimension  $\alpha$ , appelées strates.

Les strates  $X_\alpha$  de la définition 2.4.3 sont les strates  $S_i$  de la définition 2.4.1.

**Exemple 2.4.4.** Parapluie de Whitney (Figure 2.1) est la variété  $V$  définie par  $x^3 + z^2x^2 - y^2 = 0$ . Le calcul du gradient montre que le lieu singulier  $\Sigma V$  est défini par  $x = y = 0$ , ce qui est l'axe  $0z$ . L'ensemble  $\Sigma V$  est clairement une sous-variété. Nous avons donc seulement deux strates dans la stratification de  $V$  :  $S_1 = \Sigma V$ ,  $S_2 = V \setminus \Sigma V$ .

## 2.4.1 Trivialité topologique locale

La façon la plus naturelle d'exprimer la trivialité topologique locale, est de dire que chaque point d'une strate admet, dans la variété considérée, un voisinage qui est homéomorphe au produit d'un voisinage (boule) dans la strate et d'un cône :

**Définition 2.4.5.** Nous disons que la stratification  $(\mathcal{S})$  de l'espace  $V$ , satisfait la condition de *trivialité topologique locale* si pour chaque point  $x$  dans une strate  $S_i$  de dimension  $i$ , il existe :

- a) un voisinage distingué  $U_x$  de  $x$  dans  $X$ ,
- b) un homéomorphisme  $\varphi_x : U_x \rightarrow \mathbb{B}^i \times \mathring{c}(L_x)$

où :

- i)  $\mathbb{B}^i$  est une boule ouverte dans  $\mathbb{R}^i$ ,

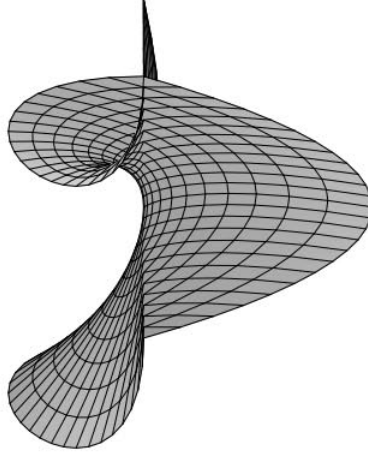


FIGURE 2.1 – Le parapluie de Whitney

- ii) le “link”  $L_x$  est un ensemble compact de dimension  $n - i - 1$  indépendant du point dans la strate  $S_i$  et filtré par :

$$L_x \supset L_{n-i-2} \supset L_{n-i-3} \supset \cdots \supset L_0 \supset L_{-1} = \emptyset,$$

- iii)  $\mathring{c}(L_x)$  est le cône ouvert de base  $L_x$  (moins la base). Par définition, nous avons  $\mathring{c}(\emptyset) = \{\text{point}\}$ .

En outre, l’homéomorphisme  $\varphi_x$  préserve les stratifications de  $U_x$  et de  $\mathbb{B}^i \times \mathring{c}(L_x)$  respectivement, c’est-à-dire que  $\varphi_x$  induit des homéomorphismes restriction  $\varphi_x : U_x \cap V_j \rightarrow \mathbb{B}^i \times \mathring{c}(L_{j-i-1})$  pour  $j \geq i$ .

## 2.4.2 Stratification de Whitney

**Définition 2.4.6.** Nous disons que les conditions de Whitney sont réalisées pour la stratification  $\mathcal{S}$  si pour chaque paire de strates  $(S_i, S_j)$  telle que  $S_i$  soit dans l’adhérence de  $S_j$ , alors nous avons :

(a) Soit  $\{x_k\}$  une suite de points dans  $S_j$  tendant vers  $y \in S_i$ , supposons que, dans la grassmannienne appropriée, la suite des espaces tangents  $T_{x_k}(S_j)$  admette une limite  $T$  pour  $k$  tendant vers  $+\infty$ , alors  $T_y(S_i) \subset T$ .

(b) Soit  $\{x_k\}$  une suite de points de  $S_j$  tendant vers  $y \in S_i$  et  $\{y_k\}$  une suite de points de  $S_i$  tendant vers  $y$ . Supposons que, dans la grassmannienne appropriée, la suite d’espaces tangents  $T_{x_k}(S_j)$  admette une limite  $T$  pour  $k$  tendant vers  $+\infty$  et que la suite de directions  $x_k y_k$  admette une limite  $\lambda$  pour  $k$  tendant vers  $+\infty$ , alors  $\lambda \in T$ .



**Remarque 2.4.7.** Une stratification qui satisfait la condition (b) de Whitney satisfait aussi la condition (a) de Whitney mais l'inverse n'est pas vrai (voir [Th], [M1]).

### 2.4.3 Stratification de Thom-Mather

**Définition 2.4.8** (voir [Th], [M1]). Nous disons qu'une stratification d'un espace  $V$  est une *stratification de Thom-Mather* si chaque strate  $S_i$  est une variété différentiable  $\mathcal{C}^\infty$  et si pour chaque strate  $S_i$  nous avons

- a) un voisinage ouvert (voisinage tubulaire)  $T_i$  de  $S_i$  dans  $V$ ,
- b) une rétraction continue  $\pi_i$  de  $T_i$  sur  $S_i$ ,
- c) une fonction continue (tubulaire)  $\rho_i : T_i \rightarrow [0, \infty[$  qui est  $\mathcal{C}^\infty$  sur la partie régulière de  $V \cap T_i$ ,

tels que  $S_i = \{x \in T_i : \rho_i(x) = 0\}$  et si  $S_i \subset \overline{S_j}$ , alors

- i) l'application restriction  $(\pi_i, \rho_i) : T_i \cap S_j \rightarrow S_i \times [0, \infty[$  est une immersion lisse,
- ii) pour  $x \in T_i \cap T_j$  tel que  $\pi_j(x) \in T_i$ , nous avons les relations de commutation :

- 1)  $\pi_i \circ \pi_j(x) = \pi_i(x)$  et
- 2)  $\rho_i \circ \pi_j(x) = \rho_i(x)$

lorsque les deux membres des formules sont définis.

**Théorème 2.4.9** (voir [Th], [Wh]). *Toute stratification de Thom-Mather satisfait la condition de trivialité topologique locale.*

**Théorème 2.4.10** (voir [Th], [M1]). *Toute stratification de Whitney est une stratification de Thom-Mather.*

## 2.5 Homologie d'intersection

La notion d'homologie d'intersection est due à Mark Goresky et Robert MacPherson en 1974. Les auteurs ont cherché une théorie d'homologie appropriée pour retrouver la dualité de Poincaré et défini un produit d'intersection dans le cas d'une variété singulière. Leur théorie s'est avérée une bonne théorie pour retrouver, dans le cas des espaces singuliers, les résultats classiques connus pour les variétés lisses : théorème de de Rham, théorie de Hodge, théorie de Morse etc ...

Les références générales de cette section sont le papier de Goresky-MacPherson [GM] et le rapport de MacPherson [Ma] (voir aussi [Br1]).

**Définition 2.5.1.** Soit  $V$  une variété singulière dotée d'une stratification satisfaisant la condition de trivialité topologique locale

$$V = V_n \supset V_{n-1} \supset V_{n-2} \supset \cdots \supset V_1 \supset V_0 \supset V_{-1} = \emptyset.$$

Une *perversité* (au sens de Goresky-MacPherson) est une fonction à valeurs entières

$$\bar{p} : [0, \dim V] \cap \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, \quad p_\alpha := \bar{p}(\alpha)$$

telle que  $p_0 = p_1 = p_2 = 0$  et  $p_\alpha \leq p_{\alpha+1} \leq p_\alpha + 1$  pour tout  $\alpha \geq 2$ .

**Exemple 2.5.2.** Comme exemples de perversités, nous avons :

- i) la perversité zéro  $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$ ,
- ii) le perversité maximum (ou totale)  $\bar{t} = (0, 0, 0, 1, 2, \dots, n-2)$ ,
- iii) pour  $n$  pair, la perversité moyenne supérieure  $\bar{n} = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1)$  et la perversité moyenne inférieure  $\bar{m} = (0, 0, 0, 0, 1, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1)$ .

**Définition 2.5.3.** Nous disons que deux perversités  $\bar{p}$  et  $\bar{q}$  sont des *perversités complémentaires* si nous avons  $\bar{p} + \bar{q} = \bar{t}$ , c'est-à-dire  $p_\alpha + q_\alpha = t_\alpha = \alpha - 2$ , pour tout  $\alpha \geq 2$ .

Le complexe des chaînes que nous utiliserons ici sera, ou bien celui des chaînes singulières sur  $V$  à supports compacts et à coefficients rationnels et nous le notons  $C_*(V)$ , ou bien celui des chaînes singulières sur  $V$  à supports fermés et à coefficients rationnels et nous le notons  $C_*^{cl}(V)$ . Nous notons  $|\xi|$  le support de la chaîne  $\xi$ .

**Définition 2.5.4.** Une  $i$ -chaîne  $\xi \in C_i(V)$  est dite  $\bar{p}$ -permise, ou une  $(\bar{p}, i)$ -chaîne, si

$$\dim(|\xi| \cap V_{n-\alpha}) \leq i - \alpha + p_\alpha, \quad \forall \alpha.$$

Le bord d'une chaîne  $\bar{p}$ -permise n'est pas nécessairement une chaîne  $\bar{p}$ -permise. Si nous voulons définir un complexe de chaînes, il faut définir :

**Définition 2.5.5.** Nous désignons par  $IC_i^{\bar{p}}(V)$  le sous-ensemble de  $C_i(V)$  constitué des chaînes  $\xi$  telles que  $\xi$  et  $\partial\xi$  sont  $\bar{p}$ -permises, c'est-à-dire

$$IC_i^{\bar{p}}(V) = \{\xi \in C_i(V) : \dim(|\xi| \cap V_{n-\alpha}) \leq i - \alpha + p_\alpha \text{ et } \dim(|\partial\xi| \cap V_{n-\alpha}) \leq (i-1) - \alpha + p_\alpha, \forall \alpha \geq 2\}.$$

Avec pour morphisme bord  $\partial$ , le bord usuel des chaînes,  $IC_i^{\bar{p}}(V)$  est alors un complexe de chaînes.

**Définition 2.5.6.** Les groupes d'homologie d'intersection de  $V$ , pour la perversité  $\bar{p}$ , et à coefficients rationnels, notés  $IH_*^{\bar{p}}(V)$ , sont les groupes d'homologie du complexe  $(IC_*^{\bar{p}}(V), \partial)$ .

De la même façon, en utilisant le complexe des chaînes singulières à supports fermés et à coefficients rationnels, nous définissons les groupes d'homologie d'intersection de  $V$  relativement à la perversité  $\bar{p}$ , et à supports fermés. Nous les noterons  $IH_i^{\bar{p}, cl}(V)$ .

**Exemple 2.5.7** (Le double cône). Considérons le double cône  $V$  dans  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $x^2 = y^2 + z^2$  avec le sommet  $\{0\}$ . Considérons la stratification de  $V$  donnée par

$$V \supset \{0\} \supset \emptyset.$$

Seule la perversité  $\{\bar{0}\}$  est possible (parce que  $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$ ). Nous pouvons calculer facilement l'homologie d'intersection du double cône  $V$  :

$$\begin{aligned} \text{Avec supports fermés : } & IH_0^{cl}(V) = 0, \quad IH_1^{cl}(V) = 0, \quad IH_2^{cl}(V) = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}. \\ \text{Avec supports compacts : } & IH_0(V) = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, \quad IH_1(V) = 0, \quad IH_2(V) = 0. \end{aligned}$$

**Proposition 2.5.8** (Invariance topologique, [GM]). *Soit  $V$  une pseudovariété stratifiée localement compacte et  $\bar{p}$  une perversité (au sens de Goresky-MacPherson), alors les groupes d'homologie d'intersection  $IH_*^{\bar{p}}(V)$  et  $IH_*^{\bar{p},cl}(V)$  ne dépendent pas de la stratification de  $V$ .*

L'homologie d'intersection possède la propriété de dualité de Poincaré et aussi la propriété de dualité de de Rham. Dans le cas d'une variété singulière, ces propriétés ne sont pas vraies pour l'homologie classique.

**Théorème 2.5.9** (Goresky, MacPherson). *Soit  $V$  une pseudovariété compacte orientable, alors la dualité de Poincaré généralisée s'écrit :*

$$IH_k^{\bar{p}}(V) \simeq IH_{n-k}^{\bar{q}}(V),$$

où  $\bar{p}$  et  $\bar{q}$  sont des perversités complémentaires et les groupes d'homologie d'intersection sont à coefficients rationnels.

Dans le cas non-compact, l'isomorphisme ci-dessus est valable pour l'homologie à supports fermés :

$$IH_k^{\bar{p}}(V) \simeq IH_{n-k}^{\bar{q},cl}(V).$$

## Chapitre 3. L'ensemble $V_F$

Le résultat principal de l'article d'Anna et Guillaume Valette [Va-Va] fournit une nouvelle approche pour la conjecture jacobienne. Les auteurs ont construit une pseudovariété  $V_F$  associée à l'application polynomiale  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  et que nous appellerons variété des Valette. Dans le cas  $n = 2$ , ils ont prouvé que si  $F$  est une application polynomiale de déterminant jacobien partout non nul, alors  $F$  n'est pas propre si et seulement si l'homologie (ou l'homologie d'intersection) de  $V_F$  n'est pas triviale en dimension 2. Anna et Guillaume Valette ont construit l'ensemble  $V_F$  comme suit :

Considérons l'application polynomiale  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  comme une application polynomiale réelle  $F : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ . Notons  $Sing(F)$  l'ensemble singulier de  $F$ , *i.e.* l'ensemble des zéros du déterminant jacobien, et  $K_0(F)$  l'ensemble des valeurs critiques de  $F$ , *i.e.* l'ensemble  $F(Sing(F))$ .

Notons  $\rho$  la métrique euclidienne de l'ensemble but  $\mathbb{R}^{2n}$ . Nous pouvons prendre son image réciproque dans l'ensemble source de façon naturelle :

$$F^* \rho_x((x, u), (x, v)) := \rho(d_x F(u), d_x F(v)) = \rho((F(x), d_x F(u)), (F(x), d_x F(v))).$$

Nous définissons la variété riemannienne

$$M_F := (\mathbb{R}^{2n} \setminus Sing(F); F^* \rho).$$

Alors, l'application  $F$  induit une isométrie locale à proximité de tout point de l'ensemble  $M_F$ . Nous supposons toujours que l'application  $F$  est non dégénérée (*i.e.*  $M_F \neq \emptyset$ ). Alors, l'image de l'application  $F$  est un sous-ensemble Zariski de dimension  $n$  de  $\mathbb{C}^n$ , donc un ensemble de Zariski ouvert, qui est nécessairement dense, et  $F$  est dominante.

Nous voulons plonger la variété  $M_F$  dans un espace affine. Pour cela, nous pouvons utiliser l'application  $F$ . Le problème est que, en général, l'application  $F$  n'est pas globalement bijective, elle ne l'est que localement. Cependant, nous avons :

**Lemme 3.0.10.** [Va-Va] *Il existe un recouvrement fini de  $M_F$  par des ensembles ouverts semi-algébriques tels que sur chaque élément de ce recouvrement, l'application  $F$  induit un difféomorphisme.*

L'exemple 3.3.4 (voir plus loin, page 50) illustre ce lemme.

## 3.1 Rappels

### 1) Inégalité de Łojasiewicz

**Proposition 3.1.1.** [[Bo](#)] Soit  $A \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble semi-algébrique fermé et  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction semi-algébrique continue, alors il existe  $c \in \mathbb{R}$ , où  $c > 0$ , et  $p \in \mathbb{N}$  tels que pour tout  $x \in A$ , nous ayons l'inégalité

$$|f(x)| \leq c(1 + |x|^2)^p,$$

appelée l'inégalité de Łojasiewicz.

**Remarque 3.1.2.** Dans l'inégalité de Łojasiewicz, nous pouvons écrire  $(1 + |x|)^p$  à la place de  $(1 + |x|^2)^p$  puisque nous pouvons changer  $p$ . Il est parfois commode d'utiliser cette expression pour obtenir un terme  $\mathcal{C}^\infty$ , puisque  $|x|^2$  est  $\mathcal{C}^\infty$  mais  $|x|$  ne l'est pas.

### 2) Fonction de Nash

**Définition 3.1.3.** Une fonction de Nash sur un sous-ensemble ouvert semi-algébrique  $U \subset \mathbb{R}^n$  est une fonction analytique  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant une équation polynomiale non triviale  $P(x, f(x)) = 0$ , pour tout  $x$  dans  $U$ .

**Exemple 3.1.4.** i) La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  est une fonction de Nash, puisqu'il existe un polynôme  $P(x, y) = (x^2 + 1)y - 1$  tel que  $P(x, f(x)) = 0$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

ii) La fonction  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = \ln(x)$  n'est pas une fonction de Nash.

### 3) Lemme de séparation de Mostowski

**Lemme 3.1.5** (Lemme de séparation, Mostowski, [[Mo](#)]). Soient  $U$  un sous-ensemble ouvert, semi-algébrique dans  $\mathbb{R}^n$  et  $A, B$  deux sous-ensemble fermés, semi-algébriques et disjoints contenus dans  $U$ . Alors il existe une fonction de Nash  $\psi$  sur  $U$  telle que  $\psi$  est (strictement) positive sur  $A$  et (strictement) négative sur  $B$ .

### 4) Lemme de sélection de la courbe ("Curve selection Lemma").

**Lemme 3.1.6** (Lemme de sélection de la courbe [[Co](#)]). Soit  $U$  un sous-ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^m$ , tel que  $0 \in \overline{U}$ . Alors il existe une courbe analytique réelle  $p : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^m$  telle que  $p(0) = 0$  et  $p(t) \in U$ , pour tout  $t > 0$ .

### 5) Famille d'ensembles semi-algébriques

**Définition 3.1.7.** Une famille d'ensembles semi-algébriques (paramétrée par  $\mathbb{R}$ ) est un ensemble semi-algébrique  $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , la dernière variable étant considérée comme un paramètre.

**Remarque 3.1.8.** L'ensemble semi-algébrique  $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  sera considéré comme une famille dépendant algébriquement du paramètre  $t \in \mathbb{R}$ . La “fibre” de  $A$  en  $t$  est définie par :

$$A_t := \{x \in \mathbb{R}^n : (x, t) \in A\}.$$

**Lemme 3.1.9.** [Va-Va] Soit  $\beta : T_j \rightarrow \mathbb{R}^n$  une  $j$ -chaîne singulière et soit  $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  une famille d'ensembles semi-algébriques compacts telle que  $|\beta| \subset A_t$  pour tout  $t \in [0, \varepsilon]$ . Supposons que  $|\beta|$  borde une  $(j + 1)$ - chaîne dans chaque  $A_t$  avec  $t \in ]0, \varepsilon]$  suffisamment petit. Alors  $|\beta|$  borde aussi une chaîne dans  $A_0$ .

## 6) Contour apparent à l'infini

**Définition 3.1.10** (voir [Va-Va]). Pour tout sous-ensemble non-borné  $X \subset \mathbb{R}^n$ , nous définissons “le contour apparent à l'infini” (appelé “tangent cone at infinity” dans [Va-Va]) par :

$$C_\infty(X) := \{\lambda \in \mathbb{S}^{n-1}(0, 1) \text{ tel que } \exists \varphi : ]t_0; t_0 + \varepsilon] \rightarrow X \text{ semi-algébrique,}$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = \infty, \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\varphi(t)}{|\varphi(t)|} = \lambda\},$$

où  $\mathbb{S}^{n-1}(0, 1) := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 = 1\}$  (voir figure 3.2).

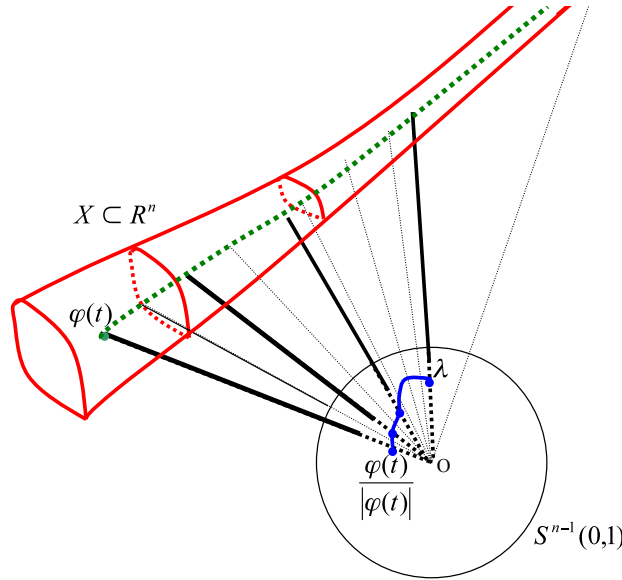


FIGURE 3.2 – Contour apparent à l'infini

**Exemple 3.1.11** (voir figure 3.3). Considérons la parabole  $P := \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $a$  le point de coordonnées  $(0, 1)$ , nous avons

$$C_\infty(P) := \left\{ \lambda \in \mathbb{S}^1(0, 1) \text{ tel que } \lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x, x^2)}{\sqrt{x^2 + x^4}} \right\} = \{a\}.$$

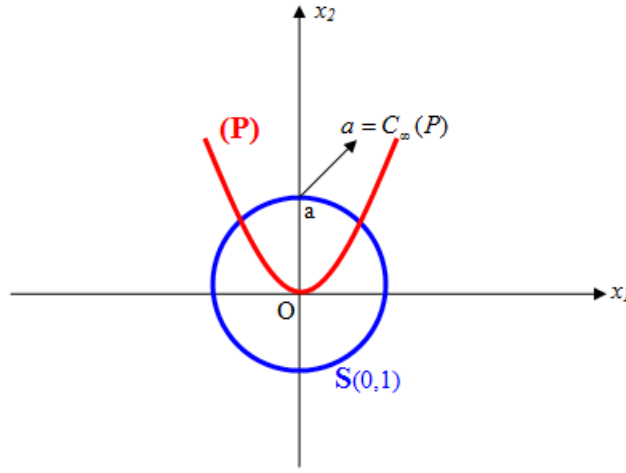


FIGURE 3.3 – Le contour apparent à l’infini de la parabole  $P := \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$  est le point  $a$ .

**Exemple 3.1.12** (voir figure 3.4). Considérons un arc de Puiseux  $\gamma : D(0; \eta) \rightarrow \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$  dans  $\mathbb{C}^n$  tel que  $\gamma = az^\alpha + \dots$ , (où  $\alpha$  est négatif,  $a$  est un vecteur unité de  $\mathbb{R}^{2n}$  et où les termes suivants sont de degré supérieur à  $\alpha$ ) et tendant vers l’infini lorsque  $z$  tend vers 0. Soit  $\varphi$  le morphisme composé  $\gamma \circ \varphi'$  où  $\varphi'$  est un isomorphisme  $\varphi' : ]0, \varepsilon] \rightarrow ]0, z_1]$ ,  $z_1 = e^{i\alpha\theta_1} \in D(0; \eta)$ . Nous avons alors

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{|\varphi(t)|} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\gamma(z)}{|\gamma(z)|} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{az^\alpha + \dots}{|az^\alpha + \dots|} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{ar^\alpha e^{i\alpha\theta_1} + \dots}{|a||r^\alpha||e^{i\alpha\theta_1}|(1 + \dots)} = a.e^{i\alpha\theta_1}.$$

Donc  $\mathbb{C}_\infty(|\gamma|)$  est  $\mathbb{S}^1.a$ , où  $\mathbb{S}^1.a$  est l’orbite de  $a$  par  $\mathbb{S}^1$ , c’est-à-dire

$$\mathbb{S}^1.a = \{z.a \in \mathbb{S}^{2n-1}(0, 1) : z \in \mathbb{S}^1\}.$$

Le lemme suivant sera utile dans la preuve du théorème 3.5.2, page 56.

Rappelons d’abord qu’une application polynomiale  $F_i : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  peut s’écrire  $F_i = \sum_j F_{ij}$ , où  $F_{ij}$  est la partie homogène de degré  $d_j$  dans  $F_i$ . Nous définissons la forme initiale  $\hat{F}_i$  de  $F_i$  comme la partie homogène de plus grand degré dans  $F_i$ .

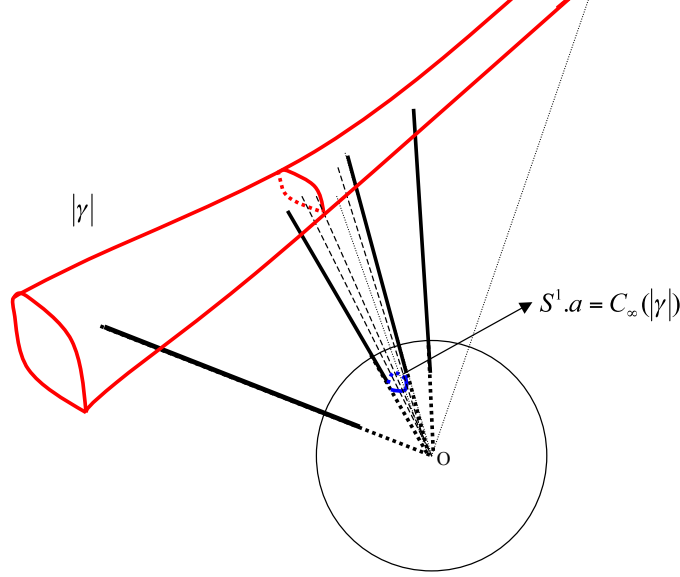


FIGURE 3.4 – Le contour apparent à l’infini d’un arc Puiseux

**Lemme 3.1.13.** *Soit  $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application polynomiale et  $\Sigma$  le lieu des zéros de  $\hat{F} := (\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_n)$ , où  $\hat{F}_i$  est la forme initiale de  $F_i$  avec  $i = 1, \dots, n$ . Si  $X$  est un sous-ensemble (non-borné) de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $F(X)$  est borné, alors  $C_\infty(X)$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{S}^{n-1}(0, 1) \cap \Sigma$ .*

*Démonstration.* Par définition,  $C_\infty(X)$  est dans  $\mathbb{S}^{n-1}(0, 1)$ . Montrons maintenant que  $C_\infty(X)$  est dans  $\Sigma$ . En fait, considérons le point  $\lambda \in C_\infty(X)$ , il existe une courbe  $\gamma : ]0; \varepsilon] \rightarrow X$  semi-algébrique telle que  $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = \infty$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} = \lambda$ . Alors  $\gamma(t)$  s’écrit  $\gamma(t) = \lambda t^m + \dots$  et  $\hat{F}_i = \hat{F}_i(\lambda) t^{m d_i} + \dots$ . Puisque  $F(X)$  est borné,  $\hat{F}_i$  ne tend pas vers l’infini lorsque  $t$  tend vers 0, donc  $\hat{F}_i(\lambda) = 0$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .  $\square$

## 3.2 Construction de l’ensemble $V_F$

Dans cette section, nous explicitons la construction de l’ensemble  $V_F$  : Le point clé en est le lemme 3.0.10 ci-dessus.

**Proposition 3.2.1.** *[Va-Va] Soit  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application polynomiale. Il existe :*

a) *une pseudovariété semi-algébrique réelle  $V_F \subset \mathbb{R}^{2n+p}$  où  $p > 0$ , telle que*

$$\text{Sing}(V_F) \subset (S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\} \subset \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^p,$$



b) une application semi-algébrique bilipschitzienne :

$$h_F : M_F \rightarrow V_F \setminus (S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$$

où  $V_F \setminus (S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$  est équipée de la métrique induite sur  $\mathbb{R}^{2n+p}$ .

Nous donnons par la suite (3.3) quelques exemples de cette proposition. Auparavant nous reprenons ici et explicitons la démonstration de [Va-Va].

*Démonstration.* Utilisons le lemme 3.0.10, page 41, nous avons un recouvrement fini  $\{U_1, U_2, \dots, U_p\}$  de  $M_F$  par des ensembles ouverts semi-algébriques tels que sur chaque élément de ce recouvrement, l'application  $F$  induit un difféomorphisme. Nous pouvons ainsi trouver des sous-ensembles fermés semi-algébriques  $V_i \subset U_i$  qui recouvrent  $M_F$ . Par le lemme 3.1.5, page 42 de Mostowski, il existe des fonctions de Nash  $\psi_i : M_F \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , telles que pour chaque  $i$ ,  $\psi_i$  est positive sur  $V_i$  et négative sur  $M_F \setminus U_i$ . Nous définissons :

$$h_F := (F, \psi_1, \dots, \psi_p) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+p},$$

$$V_F := \overline{h_F(M_F)}.$$

i)  $h_F$  est injective : Supposons que  $h_F$  ne soit pas injective, il existe  $x \neq x'$  dans  $M_F$  tels que  $h_F(x) = h_F(x')$ . Donc nous avons  $F(x) = F(x')$  et  $\psi_i(x) = \psi_i(x')$ ,  $\forall i = 1, \dots, p$ . Puisque  $\{V_i\}$  est un recouvrement de  $M_F$ , il existe  $i$  tel que  $x \in V_i$ . Mais  $F$  est injective sur  $U_i$  donc  $x' \in \mathbb{R}^{2n} \setminus U_i$ . Nous avons donc  $\psi_i(x) > 0$  et  $\psi_i(x') < 0$ , d'où la contradiction.

ii) Maintenant, nous montrons que si les fonctions  $\psi_i$  sont choisies suffisamment petites alors  $h_F$  est bilipschitzienne. Fixons un point  $x \in \mathbb{R}^{2n}$  et un voisinage  $U$  de  $x$  tels que l'application  $F|_U : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  soit un difféomorphisme sur son image. Nous définissons les fonctions suivantes sur  $F(U)$  :

$$\tilde{\psi}_i(y) := \psi_i \circ (F|_U)^{-1}(y), \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\hat{\psi}(y) := (y; \tilde{\psi}_1(y), \dots, \tilde{\psi}_p(y)).$$

Nous avons

$$h_F(x) = (F(x), \tilde{\psi}_1(F(x)), \dots, \tilde{\psi}_p(F(x))) = \hat{\psi}(F(x)).$$

Puisque l'application  $F : (U, \rho_F) \rightarrow F(U)$  est bilipschitzienne, pour que  $h_F$  soit bilipschitzienne, il suffit de prouver que  $\hat{\psi} : F(U) \rightarrow \pi_1^{-1}(F(U))$  l'est. Il suffit donc de prouver que les applications  $\tilde{\psi}_i$  sont bilipschitziennes. Pour cela, nous allons montrer qu'elles ont des dérivées bornées. Nous avons

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial y}(x) = d_x(\psi_i(x)) d_y F^{-1}(y). \quad (3.2.2)$$

Utilisons l'inégalité de Łojasiewicz pour l'application  $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = \frac{1}{|d_x F|}$ , où  $d_x F : T_x \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^{2n} \rightarrow T_x \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$  est l'application tangente de  $F$ . Alors,  $\forall x \in \mathbb{R}^{2n}, \exists c > 0, p \in \mathbb{N}$  tels que  $|f(x)| \leq c(1 + |x|^2)^p$ , donc

$$\frac{1}{|d_x F|} \leq c(1 + |x|^2)^p.$$

Mais  $F(x) = y$ , donc nous avons

$$|d_y F^{-1}| = \frac{1}{|d_x F|} \leq c(1 + |x|^2)^p. \quad (3.2.3)$$

De la même façon, utilisons l'inégalité de Łojasiewicz pour l'application  $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = |d_x \psi_i|$ . Nous avons

$$\forall x \in \mathbb{R}^{2n}, \quad |d_x \psi_i| \leq c'(1 + |x|^2)^{p'} \quad (c' > 0, p' \in \mathbb{N}). \quad (3.2.4)$$

Donc, par (3.2.2), (3.2.3) et (3.2.4)

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial y}(x) \leq c.c'(1 + |x|^2)^{p+p'}.$$

Notons  $cc' = C$  et  $p + p' = N$ . Nous définissons de nouvelles applications  $\tilde{\psi}_i$  en multipliant chaque  $\psi_i$  par  $\frac{1}{(1+|x|^2)^N}$ . Nous avons  $\frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial y}(x) \leq C$ . Les applications  $\tilde{\psi}_i$  ont alors des dérivées bornées, et donc  $h_F$  est bilipschitzienne.

Montrons maintenant que  $Sing(V_F) \subset (S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ . Nous avons  $Sing V_F = V_F \setminus \text{int}(V_F)$  avec  $V_F = \overline{h_F(M_F)}$ , donc  $Sing V_F \subset V_F \setminus h_F(M_F)$ . En utilisant à nouveau l'inégalité de Łojasiewicz, nous pouvons supposer que  $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_p(x)$  tendent vers zéro lorsque  $x$  tend vers l'infini et près de l'ensemble  $Sing F$ . Il vient alors

$$Sing(V_F) \subset V_F \setminus h_F(M_F) \subset (S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\},$$

d'où le résultat.  $\square$

Rappelons que l'ensemble des Valette  $V_F$  n'est pas unique, il dépend d'un choix de recouvrement de  $M_F$  et du choix des fonctions de Nash. Cependant, les résultats suivants sont valables pour tous les choix de  $V_F$ , nous nous permettrons donc parfois de parler de "*l'ensemble des Valette*". Cela signifiera un choix de l'ensemble  $V_F$  correspondant à un choix de recouvrement de  $M_F$  et de fonctions de Nash.

**Remarque 3.2.5.** Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M_F & \xrightarrow{h_F} & V_F \\ & \searrow F & \downarrow \pi_F \\ & & \mathbb{R}^{2n} \setminus K_0(F). \end{array} \quad (3.2.6)$$

où  $\pi_F$  est la projection canonique sur les  $2n$  premières coordonnées et  $h_F$  est bijective sur son image  $V_F \setminus ((S_F \cup K_0(F)) \times 0_{\mathbb{R}^p})$ .

**Remarque 3.2.7.** L'ensemble  $V_F$  construit par Anna et Guillaume Valette n'est pas unique. Il dépend du recouvrement que nous choisissons pour  $M_F$  et des fonctions de Nash  $\psi_i$ . Nous savons cependant que  $V_F$  est une pseudovariété semi-algébrique réelle de dimension  $2n$  dans  $\mathbb{R}^{2n+p}$  dont la partie singulière satisfait

$$\text{Sing}(V_F) \subset (S_F \cup K_0(F)) \times 0_{\mathbb{R}^p}.$$

La question naturelle se pose de l'existence d'une pseudovariété  $V_F$  satisfaisant les propriétés de la proposition 3.2.1 dans le cas réel. Nous donnons la réponse par la proposition ci-dessus à savoir qu'il existe un tel ensemble  $V_F$  qui, en général est une variété singulière, mais n'est pas nécessairement une pseudovariété.

**Proposition 3.2.8** ([NT-V-V], [NT1]). *Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application polynomiale. Alors, il existe une variété semi-algébrique réelle  $V_F \subset \mathbb{R}^{n+p}$  où  $p > 0$ , telle que*

$$\text{Sing}(V_F) \subset (S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$$

*et il existe une application bilipschitzienne semi-algébrique :*

$$h_F : M_F \rightarrow V_F \setminus (S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$$

*où  $V_F \setminus (S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$  est équipée de la métrique induite sur  $\mathbb{R}^{n+p}$ .*

*Démonstration.* Si nous considérons l'application polynomiale  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , il existe encore un recouvrement fini de  $M_F$  par des ensembles ouverts semi-algébriques tels que, sur chaque élément de ce recouvrement, l'application  $F$  induit un difféomorphisme. La démonstration se déroule comme dans le cas complexe. Nous notons que dans le cas réel, la dimension de l'ensemble  $S_F$  peut être  $n - 1$ , donc en général,  $V_F$  est une variété et non pas une pseudovariété.  $\square$

### 3.3 Exemples de $V_F$

Nous donnons ci-dessous deux exemples de  $V_F$  dans le cas complexe.

**Exemple 3.3.1.** i) Soit l'application polynomiale  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  telle que  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 x_3, x_1 x_3)$ . D'une part, l'application  $F$  n'est pas propre, et  $S_F = \{\alpha_1 = 0\} \cup \{\alpha_3 = 0\}$ . D'autre part, puisque le déterminant jacobien de  $F$  est  $JF(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3$ , alors  $\text{Sing} F$  est l'union de deux plans  $\{x_1 = 0\} \cup \{x_3 = 0\}$ . Donc,  $K_0(F) = F(\text{Sing} F)$  est  $\{(0, \alpha_2, 0)\} \cup \{(\alpha_1, 0, 0)\}$  et  $S_F \cup K_0(F) = S_F$  est  $(0\alpha_2\alpha_3) \cup (0\alpha_1\alpha_2)$ .

Nous pouvons considérer un recouvrement de  $\mathbb{R}^6 \setminus \text{Sing} F$  par 4 ouverts  $(U_i, \psi_i)$  et dans ce cas  $\nu = 10$ . L'ensemble  $V_F$  est une pseudovariété semi-algébrique réelle de dimension 6 dont le lieu singulier est contenu dans l'union de deux ensembles  $(\{(0, 0, m, n, h, k)\} \cup \{(m, n, h, k, 0, 0)\}) \times \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ .

ii) Soit  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  telle que  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2 + x_3, x_3^2)$ . L'application  $F$  est propre et l'ensemble  $S_F$  est vide. Puisque le déterminant jacobien de  $F$  est  $JF(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3$ , nous avons  $\text{Sing} F = \{x_1 = 0\} \cup \{x_3 = 0\}$ . Donc,  $K_0(F) = F(\text{Sing} F)$  est  $\{\alpha_1 = 0\} \cup \{\alpha_3 = 0\}$ . Nous avons alors  $S_F \cup K_0(F) = K_0(F) = \{\alpha_1 = 0\} \cup \{\alpha_3 = 0\}$ .

L'ensemble  $V_F$  est une pseudovariété semi-algébrique réelle de dimension 6 dont le lieu singulier est contenu dans l'union de deux ensembles  $(\{(0, 0, m, n, h, k)\} \cup \{(m, n, h, k, 0, 0)\}) \times \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ .

Nous donnons maintenant des exemples de  $V_F$  dans le cas réel.

**Exemple 3.3.2.** Soit l'application polynomiale  $F : \mathbb{R}_{(x_1, x_2)}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2$  définie par

$$F(x_1, x_2) = (x_1, x_1^2 x_2^2 + 2x_1^2 x_2) .$$

Déterminons l'ensemble  $S_F$ . Pour cela, considérons une suite  $\xi_k = (x_{1,k}, x_{2,k})$  tendant vers l'infini et telle que  $F(x_{1,k}, x_{2,k})$  tend vers  $a$  dans  $S_F$ . Puisque  $F(x_{1,k}, x_{2,k}) = (x_{1,k}, x_{1,k}^2 x_{2,k}^2 + 2x_{1,k}^2 x_{2,k})$  ne tend pas vers l'infini, alors  $x_{1,k}$  ne peut pas tendre vers l'infini. Donc  $x_{2,k}$  tend vers l'infini et  $x_{1,k}$  doit tendre vers 0, telles que  $x_{1,k} x_{2,k}$  tend vers  $\alpha_1$ . Alors  $F(x_{1,k}, x_{2,k})$  tend vers  $(0, \alpha_1^2)$ . L'ensemble  $S_F$  est donc le demi-axe  $\{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2 : \alpha_1 = 0, \alpha_2 \geq 0\}$ .

Déterminons maintenant l'ensemble  $K_0(F)$ . Nous avons

$$|J_F(x_1, x_2)| = 0 \Leftrightarrow 2x_1^2(x_2 + 1) = 0 \text{ et donc}$$

$$\text{Sing} F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{(x_1, x_2)}^2 : x_1 = 0 \text{ ou } x_2 = -1\},$$

qui est constitué de 2 droites  $x_1 = 0$  et  $x_2 = -1$ . Il vient

$$K_0(F) = \{(0, 0)\} \cup \{(\alpha_1, -\alpha_1^2)\},$$

qui est constitué d'une parabole  $\alpha_2 = -\alpha_1^2$ .

L'ensemble  $S_F \cup K_0(F)$  est la réunion d'une parabole  $\alpha_2 = -\alpha_1^2$  et d'une demi-droite de l'axe  $0\alpha_1$  dans  $\mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2$ .

Nous voyons que  $\mathbb{R}_{(x_1, x_2)}^2$  est divisé aux quatre sous-ensembles ouverts  $U_i$  par  $\text{Sing}(F)$  (voir la Figure 3.5a). L'application  $F$  est un difféomorphisme sur chaque  $U_i$ , pour  $i = 1, \dots, 4$ . Observons que,  $U_i$  est fermé dans  $M_F$ , donc nous pouvons choisir  $V_i = U_i$  pour  $i = 1, \dots, 4$ . Il existe des fonctions de Nash  $\psi_i : M_F \rightarrow \mathbb{R}$  telles que chaque  $\psi_i$  est positive sur  $U_i$  et négative sur  $U_j$  si  $j \neq i$ . Puisque  $V_F$  est l'adhérence de  $h_F(M_F)$ , où  $h_F = (F, \psi_1, \dots, \psi_4)$ , alors  $V_F$  est composé de quatre parties  $(V_F)_1, \dots, (V_F)_4$ , où  $(V_F)_i$  est l'adhérence de  $h_F(U_i)$ , pour  $i = 1, \dots, 4$ .

Maintenant, nous calculons

$$F(U_1) = F(U_2) = \{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2 : \alpha_1 > 0, \alpha_2 > -\alpha_1^2\},$$

$$F(U_3) = F(U_4) = \{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2 : \alpha_1 < 0, \alpha_2 > -\alpha_1^2\}.$$

Chaque  $(V_F)_i$  est  $F(U_i)$  plongé dans  $\mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)} \times \mathbb{R}^4$ , mais,  $(V_F)_i$  n'est plus dans le plan  $\mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}$ , il est “relevé” dans  $\mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)} \times \mathbb{R}^4$ . Cependant, la partie contenue dans  $K_0(F) \times S_F$  est encore dans le plan  $\mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}$ , puisque les fonctions  $\psi_i$  tendent vers zéro à l’infini et près de  $Sing(F)$  (voir la Figure 3.5b).

Maintenant nous voulons savoir comment les parties  $(V_F)_i$  sont collées ensemble. Utilisons le diagramme (3.2.6), page 47, pour chaque point  $a = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus K_0(F)$ , le cardinal de  $\pi_F^{-1}(a) \setminus ((K_0(F) \cup S_F) \times \{0_{\mathbb{R}^4}\})$  est égal au cardinal de  $F^{-1}(a)$  puisque  $h_F$  est bijective. Considérons l'équation

$$F(x_1, x_2) = (x_1, x_1^2 x_2^2 + 2x_1^2 x_2) = (\alpha_1, \alpha_2),$$

où  $\alpha_2 \neq -\alpha_1^2$ . Nous avons

$$\alpha_1^2 x_2^2 + 2\alpha_1^2 x_2 - \alpha_2 = 0. \quad (3.3.3)$$

Puisque le discriminant réduit est  $\Delta' = \alpha_1^4 + \alpha_1^2 \alpha_2 = \alpha_1^2(\alpha_1^2 + \alpha_2)$  alors

- 1) si  $\alpha_2 < -\alpha_1^2$ , l'équation (3.3.3) n'a pas de solution,
- 2) si  $\alpha_2 = -\alpha_1^2$ , l'équation (3.3.3) a une solution,
- 3) si  $\alpha_2 > -\alpha_1^2$ , l'équation (3.3.3) a deux solutions.

L'ensemble  $V_F$  est obtenu en observant que  $(V_F)_1$  et  $(V_F)_2$  sont collés le long de  $(K_0(F) \cup S_F) \times \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ . De la même façon,  $(V_F)_3$  et  $(V_F)_4$  sont collés le long de  $(K_0(F) \cup S_F) \times \{0_{\mathbb{R}^4}\}$  (voir figure 3.5c).

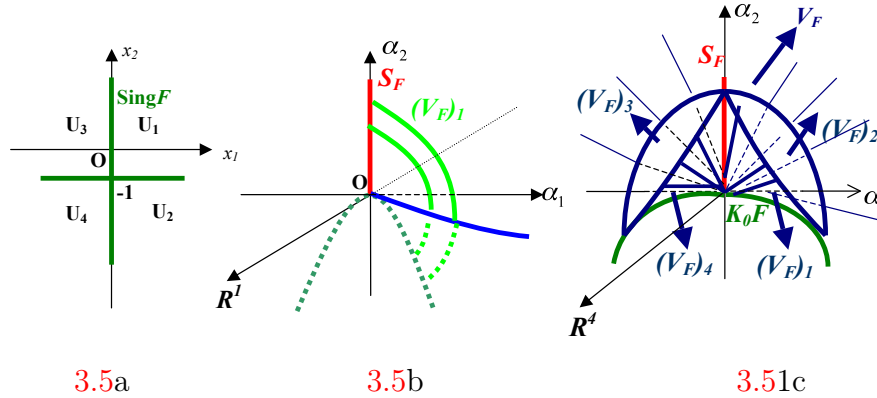


FIGURE 3.5 – La variété  $V_F$  de l'application  $F(x_1, x_2) = (x_1, x_1^2 x_2^2 + 2x_1^2 x_2)$

**Exemple 3.3.4.** [Va-Va] Soit  $F : \mathbb{R}_{(x_1, x_2)}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2$  définie par

$$F(x_1, x_2) = \left( x_1, \frac{x_1 x_2^3}{1 + x_2^6} \right).$$

Cette application rationnelle n'est pas une application polynomiale mais elle est équivalente à une applications polynomiale, au sens de la géométrie algébrique, puisqu'elle n'a pas de "pôles".

Nous déterminons l'ensemble  $S_F$ . Considérons une suite  $\xi_k = (x_{1,k}, x_{2,k})$  tendant vers l'infini, telle que  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$  dans  $S_F$ . Puisque  $F(x_{1,k}, x_{2,k}) = \left(x_{1,k}, \frac{x_{1,k}x_{2,k}^3}{1+x_{2,k}^6}\right)$  ne tend pas vers l'infini, alors  $x_{1,k}$  ne peut pas tendre vers l'infini. Donc  $x_{2,k}$  tend vers l'infini et  $F(x_{1,k}, x_{2,k})$  tend vers  $(\alpha_1, 0)$  où  $x_{1,k}$  tend vers  $\alpha_1$ . L'ensemble  $S_F$  est donc l'axe  $\alpha_2 = 0$ .

Déterminons maintenant l'ensemble  $K_0(F)$ . Nous avons

$$|J_F(x_1, x_2)| = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2^2 (1 - x_2^6) = 0 \text{ et donc}$$

$$\text{Sing}(F) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{(x_1, x_2)}^2 : x_2 = \pm 1 \text{ ou } x_1 x_2 = 0\},$$

qui est constitué de 4 droites  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_2 = 1$  et  $x_2 = -1$ . Il vient

$$K_0(F) = \{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2 : \alpha_2 = \pm \frac{\alpha_1}{2} \text{ ou } \alpha_2 = 0\},$$

qui est constitué de 3 droites  $\alpha_2 = \pm \frac{\alpha_1}{2}$  et  $\alpha_2 = 0$ .

Si  $\alpha_1 \neq 0$ , nous considérons l'équation  $F(x_1, x_2) = (\alpha_1, \alpha_2)$ . Cette équation se réduit à  $x_1 = \alpha_1$  et

$$\alpha_2 x_2^6 - \alpha_1 x_2^3 + \alpha_2 = 0,$$

qui a deux solutions si  $|\alpha_2| < \frac{\alpha_1}{2}$ , une si  $\alpha_2 = \pm \frac{\alpha_1}{2}$  ou  $\alpha_2 = 0$ , et zéro si  $|\alpha_2| > \frac{\alpha_1}{2}$ . Donc, la fibre de l'application  $F$  pour tout élément  $(\alpha_1, \alpha_2)$  avec  $\alpha_1 \neq 0$  est constituée de deux points si  $0 < |\alpha_2| < \frac{\alpha_1}{2}$ . Les fibres de  $\pi_F$  (voir diagramme (3.2.6), page 47) ont même cardinal puisque  $h_F$  est une bijection. La partie régulière de  $V_F$  contient 8 "nappes". Nous notons que  $V_F$  est une variété de dimension 2, plongée dans  $\mathbb{R}^{2+8}$  puisque la partie singulière de  $F$ , qui est constituée de 4 droites, divise le plan  $(0x_1x_2)$  en 8 parties.

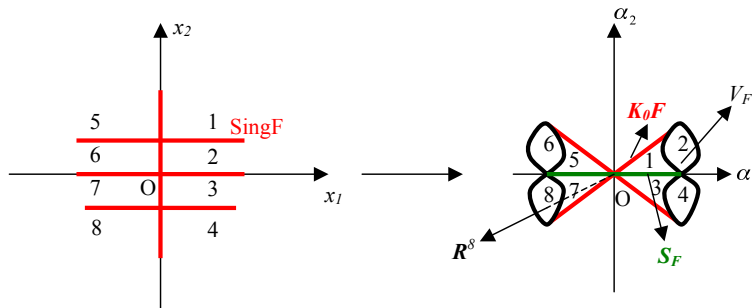


FIGURE 3.6 – La variété  $V_F$  de l'application  $F(x_1, x_2) = \left(x_1, \frac{x_1 x_2^3}{1+x_2^6}\right)$ . Chacune des 8 nappes est, en fait, dans un espace différent  $\mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2 \times \mathbb{R}$  de  $\mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2 \times \mathbb{R}^8$ . Nous avons ici identifié ces espaces en un seul  $\mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2 \times \mathbb{R}$ .

### 3.4 Stratification de l'ensemble $V_F$

**Lemme 3.4.1.** *[Va-Va]* Soit  $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  une application polynomiale génériquement finie. Il existe une stratification naturelle et topologiquement triviale de l'ensemble  $V_F$  en strates de dimensions réelles paires.

En fait, une stratification de l'ensemble  $V_F$ , montrée dans [Va-Va], est donnée par :

$$V_F \supset (S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\} \supset (Sing(S_F \cup K_0(F)) \cup B) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\} \supset \emptyset,$$

où  $B = S_{F|_{F^{-1}(S_F)}}$ .

Dans le théorème suivant nous généralisons le résultat d'Anna et Guillaume Valette dans le cas de dimension supérieure à 2.

**Théorème 3.4.2.** *[NT-V-V]* Soit  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application polynomiale génériquement finie de déterminant jacobien partout non nul. Alors, il existe une filtration naturelle de  $V_F$  :

$$V_F = V_{2n} \supset V_{2n-1} \supset V_{2n-2} \supset \cdots \supset V_1 \supset V_0 \supset V_{-1} = \emptyset$$

telle que :

- 1) pour tout  $i < n$ , alors  $V_{2i+1} = V_{2i}$ ,
- 2) la stratification correspondante satisfait la condition (b) de Whitney.

*Démonstration.* Nous avons les éléments suivants :

+ Par le théorème de Sard, nous avons  $\dim_{\mathbb{C}} Sing(S_F) \leq n-2$ , i.e.  $\dim_{\mathbb{R}} Sing(S_F) \leq 2n-4$ .

+ Soit  $M_{2n-2} = F^{-1}(S_F) \cap M_F$ . L'application  $F$  restreinte à  $M_{2n-2}$  est dominante. Par le théorème de Jelonek (voir théorème 2.3.3), nous avons  $\dim_{\mathbb{C}} S_{F|M_{2n-2}} = n-2$  (puisque  $\dim_{\mathbb{C}} M_{2n-2} = n-1$ ). Il vient  $\dim_{\mathbb{R}} S_{F|M_{2n-2}} = 2n-4$ .

+ Par le théorème de Whitney ([Wh], théorème 19.2, lemme 19.3), l'ensemble  $B_{2n-2}$  des points  $x \in S_F$  où la condition (b) de Whitney n'est pas satisfaite est contenu dans une variété algébrique complexe de dimension complexe plus petite que  $n-1$ . Donc nous avons  $\dim_{\mathbb{R}} B_{2n-2} \leq 2n-4$ .

Nous définissons une filtration  $(\mathcal{W})$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  par des variétés algébriques et compatible avec  $S_F$  :

$$W_{2n} = \mathbb{R}^{2n} \supset W_{2n-1} \supset W_{2n-2} = S_F \supset \cdots \supset W_{2k} \supset \cdots \supset W_1 \supset W_0 \supset \emptyset, \quad (\mathcal{W})$$

ceci par induction décroissante sur  $k$ . Supposons que  $W_{2k}$  soit déjà construit. Si  $\dim_{\mathbb{R}} W_{2k} < 2k$  alors nous définissons :

$$W_{2k-1} = W_{2k-2} = W_{2k}.$$

Sinon, en notant  $M_{2k} = F^{-1}(W_{2k}) \cap M_F$  et  $W'_{2k} = W_{2k} \setminus (Sing(W_{2k}) \cup S_{F|M_{2k}})$ , nous définissons :

$$W_{2k-1} = W_{2k-2} = Sing(W_{2k}) \cup S_{F|M_{2k}} \cup A_{2k}, \quad (3.4.4)$$

où  $A_{2k}$  est le plus petit ensemble algébrique contenant l'ensemble :

$$B_{2k} = \left\{ x \in W'_{2k} : \begin{array}{l} \text{si } x \in W_h \text{ avec } h > 2k \text{ alors la condition (b) de Whitney} \\ \text{n'est pas satisfaite en } x \text{ pour la paire } (W'_{2k}, W_h) \end{array} \right\}.$$

Considérons maintenant la filtration  $(\mathcal{V})$  de  $V_F$  :

$$V_F = V_{2n} \supset V_{2n-1} \supset V_{2n-2} \supset \cdots \supset V_{2k} \supset \cdots \supset V_1 \supset V_0 \supset \emptyset \quad (\mathcal{V})$$

où  $V_i = \pi_F^{-1}(W_i)$  et  $\pi_F$  est la projection canonique de  $V_F$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$ , *i.e.* projection de  $V_F$  sur les  $2n$  premières coordonnées de  $\mathbb{R}^{2n+p}$  (voir le diagramme (3.2.6), page 47).

Soit  $S'_{2i} = W_{2i} \setminus W_{2i-2}$ . Nous montrons que  $F|_{F^{-1}(S'_{2i})}$  est propre. Ceci est évident si  $S'_{2i}$  est vide. Si  $S'_{2i}$  n'est pas vide, supposons qu'il existe une suite  $\{x_l\}$  dans  $F^{-1}(S'_{2i})$  telle que  $F(x_l)$  tende vers un point  $a$  dans  $S'_{2i}$ . Nous devons prouver que la suite  $\{x_l\}$  ne tend pas vers l'infini. Puisque  $S'_{2i} = W_{2i} \setminus W_{2i-2}$ , où  $W_{2i-2} = Sing(W_{2i}) \cup S_{F|M_{2i-2}} \cup A_{2i}$ , nous avons  $a \notin S_{F|M_{2i-2}}$ . Si  $x_l$  tend vers l'infini, alors nous avons  $a \in S_{F|F^{-1}(S'_{2i})}$ , d'où la contradiction.

Soit  $X$  une composante connexe de  $\pi_F^{-1}(Z)$ , où  $Z \subseteq W_{2i} \setminus W_{2i-2}$ . Nous avons  $X \subseteq V_{2i} \setminus V_{2i-2}$ . Nous affirmons que, ou bien  $X \subseteq Z \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ , ou bien  $X \cap (S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}) = \emptyset$ . Supposons qu'il existe  $x' \in X$  tel que  $x' \notin Z \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$  et  $x'' \in X \cap (S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\})$ . Alors nous avons  $x'' = (x, 0_{\mathbb{R}^p})$ , où  $x \in S_F$ . Il existe une courbe  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \subseteq X$  où  $\gamma_1(t) \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $\gamma_2(t) \subseteq \mathbb{R}^p$ , telle que  $\gamma(0) = x'$  et  $\gamma(1) = x''$ . Appelons  $u = \gamma(t_0)$  le premier point où  $\gamma$  rencontre  $S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ . Alors nous avons  $\gamma_2(t) \neq 0$  lorsque  $t < t_0$  et  $h_F^{-1}(\gamma(t))$  est dans  $M_{2i}$ , pour  $t < t_0$ . Par ailleurs,  $F(h_F^{-1}(\gamma(t))) = \pi_F(\gamma(t))$  tend vers  $\pi_F(u)$  et  $h_F^{-1}(\gamma(t))$  tend vers l'infini quand  $t$  tend vers  $t_0$ . Ceci implique  $\pi_F(u) \in S_{F|M_{2i}} \subset W_{2i-2}$ , et  $u$  est dans  $V_{2i-2}$ , d'où la contradiction avec  $u \in X \subset V_{2i} \setminus V_{2i-2}$ .

Montrons maintenant que les  $S_{2i} := V_{2i} \setminus V_{2i-2}$  sont des variétés lisses. Puisque  $F|_{F^{-1}(S'_{2i})}$  est propre, la restriction de  $\pi_F$  à  $\pi_F^{-1}(S'_{2i}) \setminus (S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}) = h_F(F^{-1}(S'_{2i}))$  est propre. Donc,  $\pi_F$  est un revêtement sur  $S_{2i}$  et  $S_{2i}$  est une variété lisse.

Observons que dans le cas où  $\overline{X} \cap (S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\})$  n'est pas vide, alors si  $\dim X = 2i$ , cet ensemble est contenu dans  $W_{2i-2} \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ , puisque chaque point de  $\overline{X} \cap (S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\})$  est un point de  $S_{F|M_{2i}} \subseteq W_{2i-2}$ . Comme  $\pi_F$  est un revêtement sur  $V_F \setminus (S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\})$ , alors  $S'_{2i} \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$  est ouvert dans  $\pi_F^{-1}(S'_{2i})$ .

Prouvons maintenant que la filtration  $(\mathcal{V})$  définit une stratification de Whitney. Pour cela, nous prouvons d'abord que la stratification  $(\mathcal{W})$  est une stratification de Whitney. Si la strate  $S'_{2i} = W_{2i} \setminus W_{2i-2}$  n'est pas vide, alors par (3.4.4), nous avons

$$S'_{2i} = W_{2i} \setminus W_{2i-2} \subset W_{2i} \setminus A_{2i} \subset W_{2i} \setminus B_{2i}.$$



Ceci implique que la stratification  $(\mathcal{W})$  satisfait les conditions de Whitney.

Notons maintenant :

$$\Sigma_{\mathcal{W}} := \{X' : X' \text{ est une composante connexe de } W_{2i} \setminus W_{2i-2}, 0 \leq i \leq n\},$$

$$\Sigma_{\mathcal{V}} := \{X : X \text{ est une composante connexe de } V_{2i} \setminus V_{2i-2}, 0 \leq i \leq n\}.$$

Nous prouvons maintenant que si  $X \in \Sigma_{\mathcal{V}}$  alors  $\pi_F(X) \in \Sigma_{\mathcal{W}}$ . Si  $X \subseteq S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$  alors  $\pi_{F|_X}$  est l'identité et  $X$  est dans  $\Sigma_{\mathcal{W}}$ . Sinon, nous avons  $X \subseteq V_F \setminus (S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\})$ . Supposons que  $X \subseteq V_{2i} \setminus V_{2i-2}$ . Il vient  $X \cap \pi_F^{-1}(W_{2i-2}) = \emptyset$ , et donc  $\pi_F(X) \cap W_{2i-2} = \emptyset$  et  $\pi_F(X) \subseteq W_{2i} \setminus W_{2i-2}$ . Pour montrer que  $\pi_F(X) \in \Sigma_{\mathcal{W}}$ , nous devons donc vérifier que  $\pi_F(X)$  est ouvert et fermé dans  $W_{2i} \setminus W_{2i-2}$ . Puisque  $\pi_F$  est un difféomorphisme local en tout point  $x$  de  $X$ , l'ensemble  $\pi_F(X)$  est une variété lisse de dimension  $2i$ , qui est ouverte dans  $S'_{2i}$ . Montrons maintenant qu'elle est fermée dans  $S'_{2i}$ . Soit une suite  $\{y_m\} \subset \pi_F(X)$  telle que  $y_m$  tende vers  $y \notin \pi_F(X)$  et soit une suite  $\{x_m\} \subset X$  telle que  $\pi_F(x_m) = y_m$ . Puisque  $\pi_F$  est propre,  $x_m$  ne tend pas vers l'infini. Prenant une sous-suite si nécessaire, nous pouvons supposer que  $\{x_m\}$  est convergente. Notons  $x$  sa limite. Puisque  $\pi_F(x) = y \notin \pi_F(X)$ , alors le point  $x$  ne peut pas être dans  $X$  et appartient donc à  $V_{2i-2}$ , puisque  $X$  est fermé dans  $V_{2i} \setminus V_{2i-2}$ . Ceci implique que  $y = \pi_F(x) \in W_{2i-2}$  et le résultat.

Considérons maintenant une paire de strates  $(X, Y)$  de la stratification  $(\mathcal{V})$  telle que  $\overline{X} \cap Y \neq \emptyset$  et prouvons que  $(X, Y)$  satisfait la condition (b) de Whitney. Cela est clair si  $X, Y \subseteq S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ . Si aucune des strates n'est contenue dans  $S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ , alors, puisque  $\pi_F$  est un difféomorphisme local et la condition (b) de Whitney est un invariant  $\mathcal{C}^1$ , ceci est clair. Nous pouvons donc supposer que  $X \cap (S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}) = \emptyset$  et  $Y \subseteq S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$  (si  $X \subseteq S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ , alors  $Y$  rencontre  $S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$  aux points de  $\overline{X}$  et alors  $Y \subseteq (S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\})$ ). Notons  $Y := Y' \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ .

Puisque  $Y$  est ouvert dans  $\pi_F^{-1}(Y')$ , il existe un sous-ensemble sous-analytique  $U'$  de  $V_F$  tel que

$$\overline{U'} \cap \pi_F^{-1}(Y') = Y' \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}.$$

Soit  $U'' := h_F^{-1}(\overline{U'} \cap V_F \setminus (S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}))$ . Nous avons

$$U'' \cap F^{-1}(Y') = \emptyset$$

(voir le diagramme (3.2.6), page 47). Alors, la fonction distance  $d(F(x), Y')$  est partout non nulle sur  $U''$ . Puisque  $U''$  est un sous-ensemble fermé dans  $\mathbb{R}^{2n}$ , par inégalité de Łojasiewicz, multipliant  $\psi_i$  par une puissance suffisamment grande de  $\frac{1}{1+|x|^2}$ , nous pouvons supposer que sur  $U''$ , et pour tout  $i$ , nous avons :

$$\psi_i(z_m) \ll d(F(z_m), Y') \quad (3.4.6)$$

pour toute suite  $z_m$  tendant vers l'infini.

Maintenant, pour vérifier que la condition de Whitney (b) est satisfaite, nous prenons  $x_m \in X$  et  $y_m \in Y$  tendant vers  $y \in \overline{X} \cap Y$ . Supposons que  $l = \lim \overline{x_m y_m}$  et  $\tau = \lim T_{x_m} X$  existent, nous devons vérifier que  $l$  est contenue dans  $\tau$ .

Il existe  $j$  telle que  $x_m$  appartient à  $h_F(U_j)$  pour tout  $m$ . En considérant une sous-suite si nécessaire, nous pouvons supposer que cette sous-suite est contenue dans  $h_F(U_j)$ . Sur  $U_j$ , l'application  $\pi_F$  est bijection et son inverse est

$$\hat{\psi}(y) = (y, \tilde{\psi}_1(y), \dots, \tilde{\psi}_p(y)),$$

où  $\tilde{\psi}_i(y) = \psi_i \circ F|_{U_j}^{-1}$  (voir la preuve de la proposition 3.2.1, page 45).

Soient  $x_m = (x'_m, \tilde{\psi}(x'_m))$  et  $y_m = (y'_m, 0_{\mathbb{R}^p})$ , où  $x'_m = \pi_F(x_m)$  et  $y'_m = \pi_F(y_m)$ , alors  $x_m - y_m = (x'_m - y'_m, \tilde{\psi}(x'_m))$ . Nous affirmons que

$$\tilde{\psi}(x'_m) \ll |x'_m - y'_m|. \quad (3.4.7)$$

Si  $z_m = F^{-1}(x'_m)$  alors  $F(z_m) = x'_m$ . Par (3.4.6), nous avons

$$\tilde{\psi}_i(x'_m) \ll d(x'_m; Y') \leq |x'_m - y'_m|,$$

ce qui montre (3.4.7).

D'une part, les ensembles  $\pi_F(X)$  et  $\pi_F(Y)$  appartiennent à  $\Sigma_{\mathcal{W}}$ , ils satisfont la condition (b) de Whitney. En fait,

$$\lim \frac{x'_m - y'_m}{|x'_m - y'_m|} = l' \subseteq \tau' = \lim T_{x'_m} \pi_F(X)$$

(en considérant une sous-suite si nécessaire, nous pouvons supposer que  $\frac{x'_m - y'_m}{|x'_m - y'_m|}$  est convergente). Nous avons

$$\frac{x_m - y_m}{|x_m - y_m|} = \frac{(x'_m - y'_m, \tilde{\psi}(x'_m))}{|x_m - y_m|} \rightarrow (l', 0) = l.$$

D'autre part, observons que

$$d_x \pi_F^{-1} = (Id, \partial_x \tilde{\psi}_1, \dots, \partial_x \tilde{\psi}_p).$$

Multiplions  $\psi$  par une puissance suffisamment grande de  $\frac{1}{1+|x|^2}$ , nous pouvons supposer que les dérivés partiels du premier ordre de  $\tilde{\psi}$  en  $x'_m$  tendent vers zéro quand  $m$  tend vers l'infini. Alors  $T_{x_m} X$  tend vers  $\tau = \lim T_{x_m} \pi_F(X) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\} = \tau' \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ . Puisque  $l' \in \tau'$  alors nous avons  $l = (l', 0) \in \tau = \tau' \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ .  $\square$

### 3.5 L'ensemble $V_F$ et la conjecture jacobienne

Rappelons ici le théorème d'Anna et Guillaume Valette dans le cas d'une application polynomiale  $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ .

**Théorème 3.5.1.** *[Va-Va] Soit  $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  une application polynomiale de déterminant jacobien partout non nul. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $F$  n'est pas propre,
- (2)  $H_2(V_F, \mathbb{R}) \neq 0$ ,
- (3)  $IH_2^{\bar{p}}(V_F, \mathbb{R}) \neq 0$ , pour une perversité (ou toutes les perversités)  $\bar{p}$ .

Nous donnons ci-dessous la généralisation de ce théorème dans le cas d'une application polynomiale  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Rappelons d'abord qu'une application polynomiale  $F_i : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  peut s'écrire :

$$F_i = \sum_j F_{ij}$$

où  $F_{ij}$  est la partie homogène de degré  $d_j$  dans  $F_i$ . La forme initiale de  $F_i$  est la partie homogène de plus grand degré de  $F_i$ .

**Théorème 3.5.2.** *[NT-V-V] Soit  $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application polynomiale de déterminant jacobien partout non nul. Soient  $\hat{F}_i$  les formes initiales respectives des composantes de  $F_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Si  $\text{rang}(D\hat{F}_i)_{i=1, \dots, n}(x) > n - 2$ , pour tout  $x \in \mathbb{C}^n$ , alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $F$  n'est pas propre,
- (2)  $H_2(V_F, \mathbb{R}) \neq 0$ ,
- (3)  $IH_2^{\bar{p}}(V_F, \mathbb{R}) \neq 0$ , pour une perversité (ou toutes les perversités)  $\bar{p}$ ,
- (4)  $IH_{2n-2}^{\bar{p}}(V_F, \mathbb{R}) \neq 0$ , pour une perversité (ou toutes les perversités)  $\bar{p}$ .

La preuve suivante est inspirée de celle d'Anna et Guillaume Valette [Va-Va].

*Démonstration.* (4)  $\Leftrightarrow$  (3) : par le théorème de Goresky-MacPherson pour la dualité de Poincaré en homologie d'intersection, nous avons :

$$IH_2^{\bar{p}}(V_F) = IH_{2n-2}^{\bar{q}, cl}(V_F),$$

où  $\bar{q}$  est la perversité complémentaire de  $\bar{p}$  et “cl” signifé que nous considérons l'homologie à supports fermés.

(3)  $\Rightarrow$  (1), (3)  $\Rightarrow$  (2) : nous savons que  $K_0(F)$  est vide. Supposons que, de plus,  $F$  soit propre alors l'ensemble  $S_F$  est aussi vide. Donc  $\text{Sing}(V_F)$  est vide et  $V_F$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^{2n}$ . Il vient  $H_2(V_F) = 0$  et  $IH_2^{\bar{p}}(V_F) = 0$ .

(1)  $\Rightarrow$  (2), (1)  $\Rightarrow$  (3) : supposons que  $F$  ne soit pas propre. Il existe donc un arc de Puiseux  $\gamma : D(0, \eta) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ ,  $\gamma = uz^\alpha + \dots$ , (où  $\alpha$  est négatif,  $a$  est un vecteur

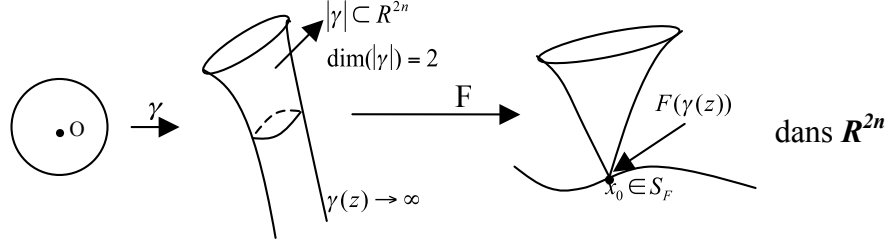


FIGURE 3.7 – L'image  $F(\gamma)$  pour  $\gamma$  arc de Puiseux

unité de  $\mathbb{R}^{2n}$  et où les termes suivants sont de degré supérieur à  $\alpha$ ) tendant vers l'infini et tel que  $F(\gamma(z))$  converge vers un point générique  $x_0$  dans  $S_F$  (voir figure 3.7).

Soit  $\delta$  un triangle orienté dans  $\mathbb{R}^{2n}$  dont le barycentre est l'origine. Alors, puisque  $h_F \circ \gamma$  (où  $h_F = (F, \psi_1, \dots, \psi_p)$ ) s'étend continûment à 0, l'application  $h_F \circ \gamma$  définit un 2-simplexe singulier de  $V_F$  que nous noterons  $c$  (voir figure 3.8).

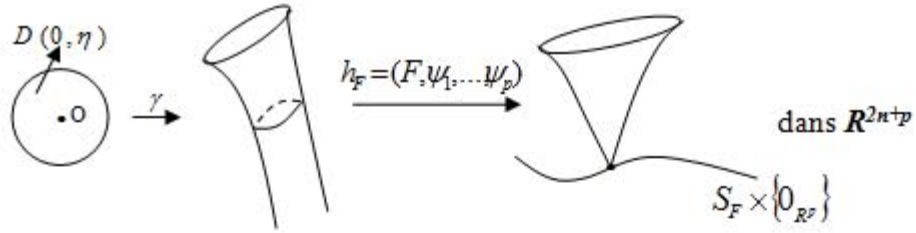


FIGURE 3.8 – L'image  $h_F \circ \gamma$  pour  $\gamma$  arc de Puiseux

En effet,  $\text{codim}_{\mathbb{R}} S_F = 2$ , nous avons

$$0 = \dim_{\mathbb{R}} \{x_0\} = \dim_{\mathbb{R}} ((S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}) \cap |c|) \leq 2 - 2 + p_2,$$

puisque  $p_2 = 0$  pour toute perversité  $\bar{p}$ . Donc le simplexe  $c$  est  $(\bar{p}, 2)$ -admissible pour toute perversité  $\bar{p}$ .

Le support de  $\partial c$  est contenu dans  $V_F \setminus S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ . Alors, par définition de l'ensemble  $V_F$ , nous avons  $V_F \setminus S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ . Puisque  $H_1(\mathbb{R}^{2n}) = 0$ , la chaîne  $\partial c$  borde une chaîne singulière  $e \in C^2(V_F \setminus S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\})$ . Donc  $\sigma = c - e$  est un cycle  $(\bar{p}, 2)$ -admissible de  $V_F$  (voir figure 3.9).

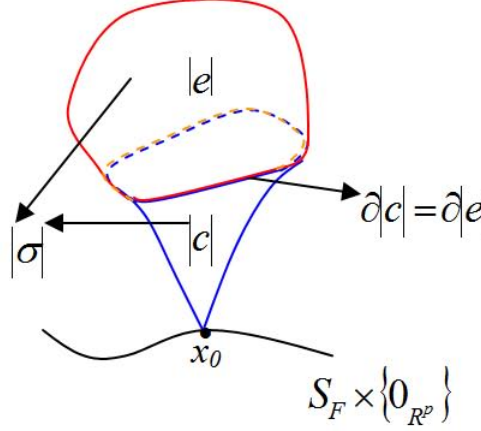


FIGURE 3.9 – Le simplexe  $|c|$ , la chaîne  $|e|$  et le cycle  $|\sigma|$

Nous affirmons que  $\sigma$  ne borde pas une 3-chaîne dans  $V_F$ . Supposons le contraire, *i.e.* supposons qu'il existe une chaîne  $\tau \in C_3(V_F)$  telle que  $\partial\tau = \sigma$ . Soient

$$A := h_F^{-1}(|\sigma| \cap (V_F \setminus (S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}))),$$

$$B := h_F^{-1}(|\tau| \cap (V_F \setminus (S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}))).$$

Par définition (voir définition 3.1.10, page 43),  $C_\infty(A)$  et  $C_\infty(B)$  sont des sous-ensembles de  $\mathbb{S}^{2n-1}(0, 1)$ . Observons que, dans un voisinage de l'infini, l'ensemble  $A$  coïncide avec le support de l'arc de Puiseux  $\gamma$ . Soit  $\Sigma$  le lieu des zéros de  $\hat{F} := (\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_n)$ . Par l'exemple 3.1.12, page 44, l'ensemble  $C_\infty(A)$  est  $\mathbb{S}^1.a$ , qui est un cercle dans  $\Sigma \cap \mathbb{S}^{2n-1}(0, 1)$ . Puisque  $F(A)$  et  $F(B)$  sont bornés, alors par le lemme 3.1.13, page 45,  $C_\infty(A)$  et  $C_\infty(B)$  sont des sous-ensembles de  $\Sigma \cap \mathbb{S}^{2n-1}(0, 1)$ .

Pour  $R$  assez grand, la sphère  $\mathbb{S}^{2n-1}(0, R)$  de centre 0 et de rayon  $R$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  est transverse à  $A$  et  $B$  (aux points réguliers). Soient

$$\sigma_R := \mathbb{S}^{2n-1}(0, R) \cap A, \quad \tau_R := \mathbb{S}^{2n-1}(0, R) \cap B.$$

Pour une triangulation adaptée, la chaîne  $\sigma_R$  borde la chaîne  $\tau_R$ .

Considérons une rétraction par déformation forte et semi-algébrique

$$\rho : W \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{S}^1.a,$$

où  $W$  est un voisinage de  $\mathbb{S}^1.a$  dans  $\mathbb{S}^{2n-1}(0, 1)$ .

En considérant  $R$  comme un paramètre réel, considérons les familles semi-algébriques de chaînes suivantes :

- 1)  $\tilde{\sigma}_R := \frac{\sigma_R}{R}$ , pour  $R$  assez grand, alors  $\tilde{\sigma}_R$  est inclus dans  $W$  (voir figure 3.10),

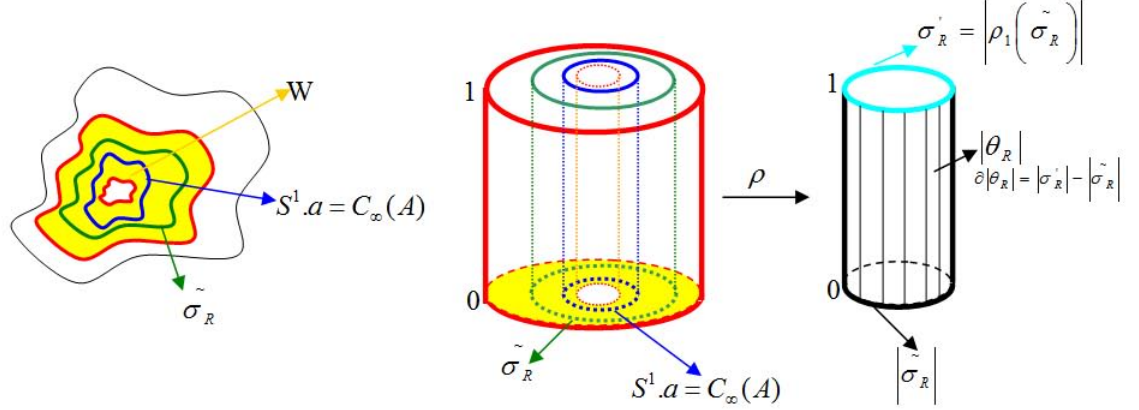


FIGURE 3.10 – La rétraction par déformation forte, semi-algébrique  $\rho : W \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{S}^1.a$  et les chaînes  $\tilde{\sigma}_R$ ,  $\sigma'_R$  et  $\theta_R$

- 2)  $\sigma'_R = \rho_1(\tilde{\sigma}_R)$ , où  $\rho_1(x) := \rho(x, 1)$ ,  $x \in W$  (voir figure 3.10),
- 3)  $\theta_R = \rho(\tilde{\sigma}_R)$ , nous avons  $\partial\theta_R = \sigma'_R - \tilde{\sigma}_R$  (voir figure 3.10),
- 4)  $\theta'_R = \tau_R + \theta_R$ , nous avons  $\partial\theta'_R = \sigma'_R$  (voir figure 3.11).

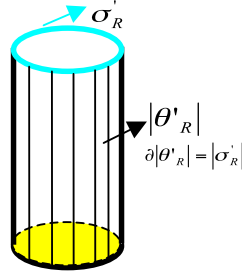


FIGURE 3.11 – La chaîne  $\theta'_R$

Au voisinage de l'infini,  $\sigma_R$  coïncide avec l'intersection du support de l'arc  $\gamma$  et de  $\mathbb{S}^{2n-1}(0, R)$ . Pour  $R$  assez grand la classe  $\sigma'_R$  dans  $\mathbb{S}^1.a$  est non nulle.

Posons  $r = 1/R$  et considérons  $r$  comme un paramètre. Soient  $\{\tilde{\sigma}_r\}$ ,  $\{\sigma'_r\}$ ,  $\{\theta_r\}$  et  $\{\theta'_r\}$  les familles semi-algébriques de chaînes correspondantes.

Notons  $E_r \subset \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$  l'adhérence de  $|\theta_r|$ , et  $E_0 := (\mathbb{R}^{2n} \times \{0\}) \cap E$ . Puisque la rétraction par déformation  $\rho$  est l'identité sur  $C_\infty(A) \times [0, 1]$ , nous avons

$$E_0 \subset \rho(C_\infty(A) \times [0, 1]) = \mathbb{S}^1.a \subset \Sigma \cap \mathbb{S}^{2n-1}(0, 1).$$

Notons  $E'_r \subset \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$  l'adhérence de  $|\theta'_r|$ , et  $E'_0 := (\mathbb{R}^{2n} \times \{0\}) \cap E'$ . Puisque  $A$  borne  $B$ , alors  $C_\infty(A)$  est contenu dans  $C_\infty(B)$ . Nous avons

$$E'_0 \subset E_0 \cup C_\infty(B) \subset \Sigma \cap \mathbb{S}^{2n-1}(0, 1).$$

La classe de  $\sigma'_r$  dans  $\mathbb{S}^1.a$  est, à un facteur près par une constante non nulle, égale à la classe de  $\mathbb{S}^1.a$ . Donc, puisque  $\sigma'_r$  borde la chaîne  $\theta'_r$ , le cercle  $\mathbb{S}^1.a$  doit border aussi une chaîne dans  $|\theta'_r|$ . Par le lemme 3.1.9, page 43,  $\mathbb{S}^1.a$  borde une chaîne dans  $E'_0$  qui est contenue dans  $\Sigma \cap \mathbb{S}^{2n-1}(0, 1)$ .

L'ensemble  $\Sigma$  est une variété projective qui est l'union de cônes dans  $\mathbb{R}^{2n}$ . Puisque  $\text{rang}_{\mathbb{C}}(D\hat{F}_1)_{i=1,\dots,n} > n - 2$  alors  $\text{corang}_{\mathbb{C}}(D\hat{F}_1)_{i=1,\dots,n} = \dim_{\mathbb{C}} \Sigma \leq 1$ , donc  $\dim_{\mathbb{R}} \Sigma \leq 2$  et  $\dim_{\mathbb{R}} \Sigma \cap \mathbb{S}^{2n-1}(0, 1) \leq 1$ . Le cercle  $\mathbb{S}^1.a$  borde donc une chaîne dans  $E'_0 \subseteq \Sigma \cap \mathbb{S}^{2n-1}(0, 1)$ , qui est l'union d'un nombre fini de cercles, d'où la contradiction (voir figure 3.12).

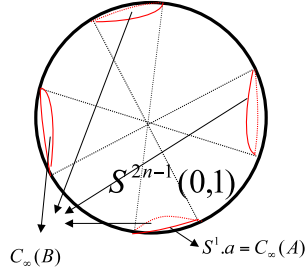


FIGURE 3.12 – L'ensemble  $\Sigma \cap \mathbb{S}^{2n-1}(0, 1)$

□

**Remarque 3.5.3.** 1) Dans la preuve de ce théorème, puisque la chaîne que nous avons choisie est  $(\bar{p}, 2)$ -admissible et qu'elle n'a pas de bord, nous avons, en fait, considéré l'homologie plutôt que l'homologie d'intersection.

2) Dans ce théorème, l'homologie non nulle ( $H_2(V_F, \mathbb{R}) \neq 0$ ) est équivalente à l'homologie d'intersection non nulle ( $IH_2^{\bar{p}}(V_F, \mathbb{R}) \neq 0$ ) puisque nous considérons ici le cas complexe, où le théorème de Jelonek nous dit que  $\text{codim}_{\mathbb{R}} S_F = 2$ .

3) Dans ce théorème, l'homologie d'intersection non nulle pour une perversité  $\bar{p}$  est équivalente à l'homologie d'intersection non nulle pour toutes les perversités  $\bar{p}$  puisque  $\text{codim}_{\mathbb{R}} S_F = 2$  (utilisons le théorème de Jelonek de nouveau), et la chaîne que nous considérons a la dimension 2.

4) Si nous considérons le cas réel  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , d'une part nous ne savons pas si le théorème ci-dessus est vrai ou non, puisque, dans le cas réel, le théorème de Jelonek

n'est plus vrai, c'est-à-dire que nous n'avons pas nécessairement  $\text{codim}_{\mathbb{R}} S_F = 2$ . D'autre part, la dimension du support de l'arc de Puiseux dans le cas réel est 1. Donc dans ce cas, nous pouvons considérer  $H_1(V_F)$  et  $IH_1^{\bar{p}}(V_F)$ .

Nous pouvons énoncer le corollaire suivant du théorème 3.5.2 :

**Corollaire 3.5.4.** *Soit  $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application polynomiale de déterminant jacobien partout non nul et telle que  $\text{rang}(D\hat{F}_i)_{i=1, \dots, n}(x) > n - 2$ , pour tout  $x \in \mathbb{C}^n$ . Si  $V_F^R = V_F \cap \overline{B^{2n-1}}(0, R) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ , pour  $R$  est assez grand, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $F$  n'est pas propre,
- (2)  $H_{\infty}^2(\text{Reg}(V_F^R)) \neq 0$ ,
- (3)  $H_{\infty}^{2n-2}(\text{Reg}(V_F^R)) \neq 0$ .

La preuve suivante est inspirée de la preuve de Guillaume et Anna Valette [Va-Va].

*Démonstration.* Nous construisons un voisinage collier de  $\partial V_F^R := \mathbb{S}^{2n-1}(0; R) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\} \cap V_F$ , pour  $R$  est assez grand. D'abord, nous voyons que si  $R$  est choisi assez grand, alors  $R$  n'est pas une valeur critique de la fonction distance de l'origine à l'ensemble  $V_F$ . Donc  $V_F^R$  est une variété lisse dont le bord est :

$$(V_F \cap \mathbb{S}^{2n-1}(0, R) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}) \setminus (S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}).$$

Par ailleurs, par le théorème de Hardt [Ha], les surfaces "niveau"  $V_F \cap \mathbb{S}^{2n-1}(0, R) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$  sont des pseudovariétés constituant une famille semi-algébrique topologiquement triviale. Nous pouvons construire cette trivialisation de façon compatible avec  $S_F$ . Donc si  $R$  est choisi assez grand, le couple  $(V_F^R, \partial V_F^R)$  constitue une pseudovariété à bord. Maintenant, par le théorème de de Rham pour des formes  $\mathcal{L}^{\infty}$  (théorème 1.6, [Va1]), nous avons  $H_{\infty}^i(\text{Reg} V_F^R) = IH_i^{\bar{i}}(V_F^R)$ . Par le théorème 3.5.2, la condition  $F$  non propre est équivalente aux conditions  $IH_2^{\bar{i}}(V_F^R) \neq 0$  et  $IH_{n-2}^{\bar{i}}(V_F^R) \neq 0$ . Donc dire que l'application  $F$  est non propre est équivalent aux conditions  $H_{\infty}^2(\text{Reg}(V_F^R)) \neq 0$  et  $H_{\infty}^{n-2}(\text{Reg}(V_F^R)) \neq 0$ .  $\square$

La signification de ce corollaire est qu'il nous permet d'avoir des informations sur les singularités sans regarder les singularités elles-mêmes, mais seulement les points réguliers. Puisqu'il est difficile de trouver l'ensemble  $V_F$  sans trouver l'ensemble  $S_F$ , nous pouvons calculer la cohomologie  $\mathcal{L}^{\infty}$  de  $\text{Reg}(V_F)$  au lieu de calculer son homologie d'intersection.



## 3.6 Homologie d'intersection de l'ensemble $V_F$

### 3.6.1 Partie régulière de l'ensemble $V_F$

D'après la proposition 3.2.1 et sa preuve, ainsi que la remarque 3.2.7, nous pouvons déterminer la partie régulière de l'ensemble  $V_F$  en utilisant le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} M_F & \xrightarrow{h_F} & V_F \\ & \searrow F & \downarrow \pi_F \\ & & \mathbb{R}^{2n} \setminus K_0(F), \end{array}$$

où  $\pi_F$  est la projection canonique sur les  $2n$  premières coordonnées et  $h_F$  est bijective sur son image  $V_F \setminus ((S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\})$ .

### 3.6.2 Partie singulière de l'ensemble $V_F$

D'après la proposition 3.2.1, la partie singulière de  $V_F$  est contenue dans  $(S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}^{v-2n}}\}$ . Une question naturelle se pose : Est-ce que  $SingV_F$  est égal à l'ensemble  $(S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}^{v-2n}}\}$  en général ? La réponse est non, comme nous allons le voir dans l'exemple 3.6.1.

Pour trouver les parties singulière et régulière de  $V_F$ , nous procédons comme suit : Par le lemme 3.0.10 et la preuve de la proposition 3.2.1, il existe un recouvrement fini  $U_1, \dots, U_p$  de  $\mathbb{R}^{2n} \setminus SingF$  et des fonctions de Nash  $\psi_i : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Puisque  $V_F = \overline{h_F(M_F)}$ , où  $h_F = (F, \psi_1, \dots, \psi_p) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+p}$ , alors  $\{\Omega_i = \overline{h_F(U_i)}\}_{i=1, \dots, p}$  est un recouvrement de  $V_F \setminus ((S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\})$ .

Considérons maintenant  $V_i \subset (S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$  telle que  $\dim V_i = i$ . Considérons un point  $x$  dans l'intérieur d'un  $i$ -simplexe  $\sigma$  tel que  $\sigma \subset V_i$ . S'il y a  $s$  suites de points situés dans  $s$  ouverts  $\Omega_1, \dots, \Omega_s$  différents et tendant vers  $x$ , alors  $\sigma$  est le bord de  $s$  simplexes  $\tau$  où  $\tau \subset V_F$ ,  $\dim \tau = i + 1$ . Si  $s = i + 1$  alors  $V_i$  est contenu dans  $RegV_F$ . Si  $i < s - 1$  alors  $V_i$  est dans  $SingV_F$ .

**Exemple 3.6.1.** Revenons à l'exemple 3.3.4, page 50 de l'application  $F : \mathbb{R}_{(x_1, x_2)}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2$  telle que

$$F(x_1, x_2) = \left( x_1, \frac{x_1 x_2^3}{1 + x_2^6} \right)$$

(voir figure 3.6, page 51).

Déterminons maintenant la partie singulière de  $V_F$ . Nous savons que  $(S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}_8}\} \subset V_F$  et de plus  $SingV_F \subset (S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}_8}\}$ . Notons  $V_1$  la droite  $\alpha_2 = \alpha_1$  dans  $\mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)} \times \{0_{\mathbb{R}_8}\}$ ,  $\sigma$  un simplexe de dimension 1 dans  $V_1$  et  $a \in \sigma^\circ$ . Alors, nous pouvons exhiber 2 suites de points dans 2 “nappes” différentes tendant vers  $a$  et donc  $\sigma$  est le bord de 2 simplexes dans  $V_F$  (voir figure 3.13). La

droite  $\alpha_2 = \alpha_1$  est donc dans  $RegV_F$ . De la même façon, la droite  $\alpha_2 = -\alpha_1$  est aussi dans  $RegV_F$ . Prenons maintenant le simplexe  $\sigma$  dans l'axe  $\{\alpha_2 = 0\}$  et  $a \in \sigma^\circ$ . Alors, nous pouvons exhiber 4 suites de points dans 4 nappes différentes tendant vers  $a$  et donc  $\sigma$  est le bord de 4 simplexes  $\tau$  où  $\tau \subset V_F$ ,  $\dim \tau = 2$  (voir figure 3.13). Donc la droite  $\alpha_2 = 0$  est dans  $SingV_F$ . La partie singulière de  $V_F$  est formée seulement de la droite  $\alpha_2 = 0$ . Dans ce cas, la partie singulière de  $V_F$  ne coïncide pas avec l'ensemble  $S_F \cup K_0(F)$ .

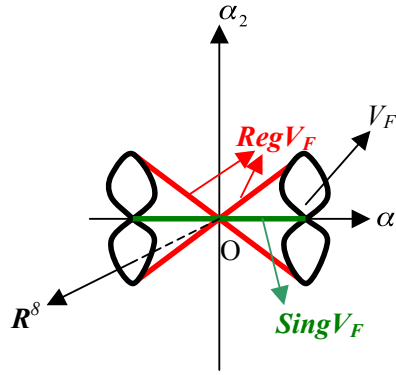


FIGURE 3.13 – Les parties singulière et régulière de l'ensemble des Valette  $V_F$  de l'application  $F(x_1, x_2) = \left(x_1, \frac{x_1 x_2^3}{1+x_2^6}\right)$

### 3.6.3 Homologie d'intersection de l'ensemble $V_F$

Pour calculer l'homologie d'intersection de l'ensemble  $V_F$ , il faut d'abord le stratifier. En général,  $SingV_F \subset (S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ . Rappelons la propriété d'invariance topologique de l'homologie d'intersection :

**Proposition 3.6.2** (Invariance topologique, [Br1]). *Soit  $X$  une pseudovariété stratifiée localement compacte et  $\bar{p}$  une perversité (au sens de Goresky-MacPherson), alors les groupes d'homologie d'intersection  $IH_*^{\bar{p}}(X)$  et  $IH_*^{\bar{p},cl}(X)$  ne dépendent pas de la stratification de  $X$ .*

Ce résultat implique que, même si la partie singulière de l'ensemble  $V_F$  est un sous-ensemble propre de l'ensemble  $(S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ , nous pouvons stratifier l'ensemble  $V_F$  comme suit

$$V_F \supset (S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\} \supset \dots, \quad (3.6.3)$$

où “...” est une stratification de l'ensemble  $(S_F \cup K_0(F)) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ .

En général, nous pouvons utiliser la stratification (3.6.3) pour calculer l'homologie d'intersection de l'ensemble  $V_F$ . Dans certains cas précis, nous pouvons décrire exactement la partie singulière de l'ensemble  $V_F$ .

Nous calculons effectivement ci-dessous l'homologie d'intersection de l'ensemble  $V_F$  pour des exemples dans le cas réel :

**Exemple 3.6.4.** Revenons à l'exemple 3.6.1 de l'application  $F : \mathbb{R}_{(x_1, x_2)}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2$  telle que

$$F(x_1, x_2) = \left( x_1, \frac{x_1 x_2^3}{1 + x_2^6} \right).$$

Nous nous proposons de calculer  $IH_1^{\bar{p}}(V_F)$ .

Puisque la partie singulière de  $V_F$  est l'axe  $\alpha_2 = 0$ , nous avons une stratification de  $V_F$  donnée par

$$V_F = (V_F)_2 \supset 0\alpha_1 = (V_F)_1 \supset (V_F)_0 = \{0\} \supset \emptyset.$$

Comme  $\dim V_F = 2$ , nous avons seulement la perversité zéro  $\bar{0}$ .

Les cycles  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  (voir figure 3.14) sont des cycles à support compact et  $h$  (droite passant par 0, voir figure 3.14) est un cycle à support fermé.

Cherchons maintenant les cycles candidats admissibles. Pour qu'une chaîne  $|\xi|$  de dimension 1 soit admissible, nous devons avoir

$$\dim(|\xi| \cap (V_F)_{2-\alpha_1}) \leq 1 - \alpha_1 + 0.$$

Pour  $\alpha_1 = 1$ , nous avons donc

$$\dim(|\xi| \cap (V_F)_1) \leq 0,$$

et pour  $\alpha_1 = 2$  :

$$\dim(|\xi| \cap (V_F)_0) \leq -1.$$

Donc  $|\xi|$  ne peut pas contenir l'origine 0, le cycle  $h$  n'est donc pas admissible. Les cycles  $\gamma_i$  rencontrent  $(V_F)_1$  en un point. Donc nous avons  $\dim(|\gamma_i| \cap (V_F)_1) = 0 \leq 0$  et les cycles  $\gamma_i$  sont admissibles.

Notons  $c(\gamma_i)$  le cône de base  $\gamma_i$  et de sommet l'origine. Nous avons

$$\gamma_i = \partial(c(\gamma_i)), \dim c(\gamma_i) = 2,$$

$$\dim(|c(\gamma_i)| \cap (V_F)_{2-\alpha}) \leq 2 - \alpha + 0, \quad \alpha = 1, 2,$$

c'est-à-dire :

$$\dim(|c(\gamma_i)| \cap (V_F)_1) \leq 1,$$

$$\dim(|c(\gamma_i)| \cap (V_F)_0) \leq 0.$$

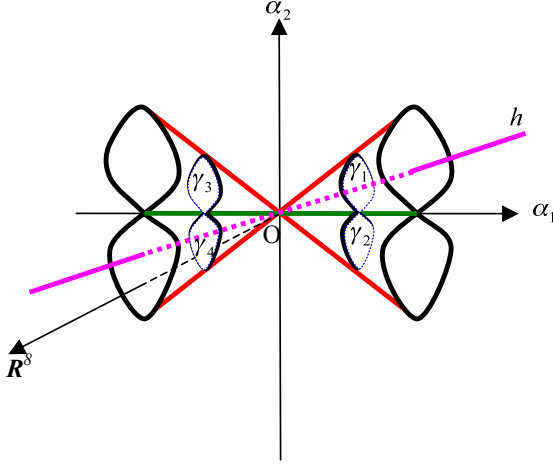


FIGURE 3.14 – Les cycles candidats pour l’homologie d’intersection de l’ensemble des Valette  $V_F$ , pour l’application  $F(x_1, x_2) = \left(x_1, \frac{x_1 x_2^3}{1+x_2^6}\right)$

Donc  $c(\gamma_i)$  est admissible, et  $\gamma_i$  est un bord admissible. L’homologie d’intersection  $IH_1^{\bar{0}}(V_F)$  à supports compacts est donc nulle.

Considérons maintenant l’homologie d’intersection  $IH_1^{cl, \bar{0}}(V_F)$  à supports fermés. Notons  $\eta_i = C(\gamma_i) \setminus c(\gamma_i)$ , où  $C(\gamma_i)$  est le cône “infini” sur  $\gamma_i$ . Alors nous avons  $\gamma_i = \partial(\eta_i)$ . De la même façon, la chaîne  $\eta_i$  est admissible, donc l’homologie d’intersection à supports fermés  $IH_1^{cl, \bar{0}}(V_F)$  est aussi nulle.

**Exemple 3.6.5.** Soit  $F : \mathbb{R}_{(x_1, x_2)}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2$  telle que

$$F(x_1, x_2) = (x_1, x_1^2 x_2^2 + 2x_1^2 x_2) .$$

De la même façon que dans l’exemple 3.6.4, l’homologie d’intersection  $IH_1^{\bar{0}}(V_F)$  à supports compacts et l’homologie d’intersection  $IH_1^{c, \bar{0}}(V_F)$  à supports fermés sont nulles.

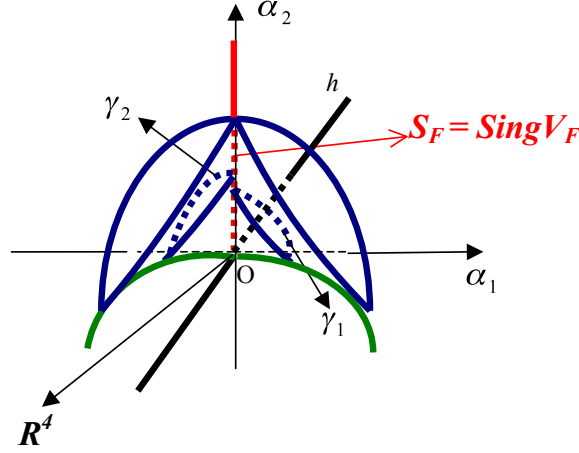


FIGURE 3.15 – Les cycles d’homologie d’intersection de l’ensemble des Valette  $V_F$  pour l’application  $F(x_1, x_2) = (x_1, x_1^2 x_2^2 + 2x_1^2 x_2)$

### 3.7 L’ensemble $V_F$ et la conjecture jacobienne réelle de Jelonek

Dans [J3], Jelonek énonce la conjecture jacobienne réelle de la façon suivante : Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application polynomiale qui est un difféomorphisme local. Soit  $S_F$  l’ensemble des points non propres de  $F$ . Si  $\text{codim} S_F \geq 2$  alors  $F$  est bijective.

En fait, Jelonek prouve le résultat suivant : Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application polynomiale de déterminant jacobien partout non nul et telle que  $\text{codim} S_F \geq 3$ , alors  $F$  est bijective. Par ailleurs, il a prouvé que sa conjecture est vraie dans le cas de dimension  $n = 2$ .

D’autre part, Pinchuk dans [Pi] donne un exemple d’une application polynomiale qui n’est pas injective  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  avec déterminant jacobien partout non nul et telle que la codimension de l’ensemble  $S_F$  soit 1. De cet exemple de Pinchuk, nous tirons l’exemple suivant :

**Exemple 3.7.1.** Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application polynomiale difféomorphisme local, définie par  $F(x_1, \dots, x_n) = (P(x_1, x_2), x_3, \dots, x_n)$  où  $P$  est l’application de Pinchuk. Alors,  $F$  n’est pas injective et  $\text{codim} S_F = 1$ .

Le cas intéressant ici est donc le cas où la codimension de l’ensemble  $S_F$  est égale à 2. Dans ce cas, la conjecture jacobienne réelle de Jelonek peut s’énoncer comme suit :

**Conjecture jacobienne réelle de Jelonek :** Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ) une application polynomiale qui est un difféomorphisme local. Si  $\text{codim} S_F = 2$  alors  $F$  est bijective.

D'autre part, Jelonek prouve dans [J3] que si sa conjecture est vraie pour l'application polynomiale  $F : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  alors la conjecture jacobienne complexe est vraie.

Nous notons que l'exemple de Pinchuk fournit une application polynomiale dont le déterminant jacobien est partout positif, mais n'est pas partout constant non nul. Notons aussi qu'une application polynomiale  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  est de déterminant jacobien partout non nul si et seulement si celui-ci est constant. Donc la conjecture jacobienne peut être formulée dans le contexte réel comme suit [J3] :

**La conjecture jacobienne réelle :** Si  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application polynomiale de déterminant jacobien constant non nul, alors  $F$  est bijective.

Nous savons que la conjecture jacobienne réelle est encore ouverte même dans le cas  $n = 2$ .

Puisque la conjecture jacobienne réelle de Jelonek est vraie pour le cas  $n = 2$ , nous avons le corollaire suivant :

**Corollaire 3.7.2.** *Soit  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une application polynomiale de déterminant jacobien partout non nul. Si  $\dim S_F \leq 0$  alors  $\dim S_F = -\infty$  et  $F$  est propre. De plus, nous avons  $H_1(V_F) = IH_1^{\bar{0}}(V_F) = 0$ .*

*Démonstration.* Puisque  $\dim S_F \leq 0$  donc  $\text{codim} S_F \geq 2$ . La conjecture jacobienne réelle de Jelonek est vraie pour le cas  $n = 2$  donc  $F$  est bijective. Alors  $F$  est propre et  $S_F = \emptyset$  et donc  $\dim S_F = -\infty$ . Le déterminant jacobien de  $F$  est donc partout non nul, alors  $K_0(F) = \emptyset$ . Nous avons  $\text{Sing}(V_F) = \emptyset$  et  $V_F \approx \mathbb{R}^2$ . Il vient  $H_1(V_F) = IH_1^{\bar{0}}(V_F) = 0$ .  $\square$

Nous avons maintenant la question suivante : Est-ce que le théorème d'Anna et Guillaume Valette est encore vrai pour le cas  $\mathbb{R}^3$  et en général le cas  $\mathbb{R}^n$  où  $n > 3$ ? Si oui, nous avons une nouvelle approche de la conjecture jacobienne réelle de Jelonek en termes d'homologie et d'homologie d'intersection de l'ensemble  $V_F$ . Nous donnons naturellement la conjecture suivante :

**Conjecture 3.7.3.** *Soit  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une application polynomiale de déterminant jacobien partout non nul et  $\text{codim} S_F = 2$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $F$  n'est pas propre,
- (2)  $H_1(V_F) \neq 0$ ,
- (3)  $IH_1^{\bar{p}}(V_F) \neq 0$ , pour toute perversité  $\bar{p}$ ,
- (4)  $IH_2^{\bar{p}}(V_F) \neq 0$ , pour toute perversité  $\bar{p}$ .



## Chapitre 4. Stratifier l'ensemble $S_F$

Le théorème d'Anna et Guillaume Valette pourrait fournir un contre-exemple à la conjecture jacobienne dans le cas  $n = 2$  (s'il en existe !) en montrant qu'il existe une application polynomiale  $F$  dont l'ensemble  $V_F$  satisfait  $H_2(V_F) \neq 0$  ou  $IH_2^{\overline{P}}(V_F) \neq 0$ . Cela suppose aussi que nous puissions définir l'ensemble  $V_F$  sans connaître  $S_F$ .

Pour calculer l'homologie d'intersection de l'ensemble  $V_F$ , nous devons d'abord définir une stratification de  $V_F$ . La partie singulière de  $V_F$  est contenue dans  $S_F \cup K_0(F) \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ ; de plus, dans le cas d'une application polynomiale de déterminant jacobien partout non nul, nous avons  $Sing(V_F) \subset S_F$ . Il faut donc d'abord décrire une méthode pour stratifier l'ensemble  $S_F$ .

Pour cela, il faut dire quand deux points  $a_1, a_2$  de  $S_F$  sont dans une même strate. Prenons un exemple afin de justifier la définition qui suit.

**Exemple 4.0.4.** Soit l'application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  telle que

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 x_2, x_1 x_3),$$

alors  $S_F$  est l'ensemble  $\{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3 : \alpha_1 = 0\}$ .

i) Soit un point  $a = (0, \alpha_2, \alpha_3) \in S_F \setminus (0\alpha_2 \cup 0\alpha_3)$  donc  $\alpha_2, \alpha_3 \neq 0$ . La suite  $\{\xi_k\} = \{(\frac{1}{k}, k\alpha_2, k\alpha_3)\}$  tend vers l'infini et son image  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$ .

ii) Soit un point  $a = (0, \alpha_2, 0) \in (0\alpha_2) \setminus \{0\}$  donc  $\alpha_2 \neq 0$ . Les suites  $\{(\frac{1}{k}, k\alpha_2, \lambda)\}$  ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ) et  $\{(1/k^2, k^2\alpha_2, k)\}$  tendent vers l'infini et leurs images tendent vers  $a$ . Nous définirons une relation d'équivalence entre suites tendant vers l'infini et dont l'image tend vers  $a$ , telle que d'une part ces deux suites ne sont pas équivalentes, et d'autre part, toute suite de  $\mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3$  tendant vers l'infini et dont l'image tend vers  $a$  est équivalente à l'une de ces deux suites (voir définition 4.2.15, page 78).

De la même façon, soit un point  $a = (0, 0, \alpha_3) \in (0\alpha_3) \setminus \{0\}$  alors les suites  $\{(\frac{1}{k}, \lambda, k\alpha_3)\}$  ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ) et  $\{(\frac{1}{k^2}, k, k^2\alpha_3)\}$  tendent vers l'infini et leurs images tendent vers  $a$ . Elles seront représentants de deux classes d'équivalence différentes.

iii) Enfin, considérons le point  $0 = (0, 0, 0)$ , les suites  $\{(0, k, k)\}$ ,  $\{(0, \lambda, k)\}$  ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ) et  $\{(0, k, \mu)\}$  ( $\mu \in \mathbb{C}$ ) tendent vers l'infini et leurs images tendent vers  $a$ . Ces trois suites ne sont pas équivalentes, au sens de notre définition et toute suite tendant vers l'infini et dont l'image tend vers  $0$  est équivalente à l'une de ces suites.

Quelle idée pouvons-nous tirer de cet exemple ? Pour tout point  $a \in S_F \setminus (0\alpha_2 \cup 0\alpha_3)$ , toutes les suites  $\{\xi_k\}$  de  $\mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3$  tendant vers l'infini et telles que  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$  sont du "type" de la suite  $\{(\frac{1}{k}, k\alpha_2, k\alpha_3)\}$  au sens suivant : les deux dernières coordonnées tendent vers l'infini et la première coordonnée tend vers  $0$  quelque soit le point  $a$  quand  $a$  décrit  $S_F \setminus (0\alpha_2 \cup 0\alpha_3)$ . Nous dirons donc que pour tout point  $a \in S_F \setminus (0\alpha_2 \cup 0\alpha_3)$ , il existe "une seule façon" pour construire une suite tendant vers l'infini et telle que son image tend vers  $a$ . Ici  $S_F \setminus (0\alpha_2 \cup 0\alpha_3)$  est une strate de dimension 2.



De même, pour tout  $a \in (0\alpha_2 \cup 0\alpha_3) \setminus \{0\}$ , il existe deux “façons” pour construire des suites tendant vers l’infini et telles que leurs images tendent vers  $a$ . Ici  $(0\alpha_2 \cup 0\alpha_3) \setminus \{0\}$  est une strate de dimension 1. Enfin, pour le point origine, il existe trois “façons” de construire une suite tendant vers l’infini et dont l’image tend vers 0. L’origine est une strate de dimension 0.

Nous obtenons donc une stratification de l’ensemble  $S_F$ , donnée par la filtration :

$$S_F \supset 0\alpha_2 \cup 0\alpha_3 \supset \{0\} \supset \emptyset.$$

Nous allons formaliser cette idée en explicitant comment “une suite tend vers l’infini selon une façon”.

## 4.1 Partition de $S_F$ définie par $\Xi_0$

**Définition 4.1.1.** Soit une suite  $\xi_k = (x_{1,k}, \dots, x_{n,k})$  dans  $\mathbb{C}^n$ , telle que  $\xi_k$  tende vers l’infini. Alors il existe toujours au moins un indice  $i \in \mathbb{N}^*$  tel que  $x_{i,k}$  tend vers l’infini. Définissons :

$$\kappa_0(\xi_k) := (i_1, \dots, i_p)[j_1, \dots, j_q],$$

où  $x_{i_r,k}$  tend vers l’infini pour  $r = 1, \dots, p$  et  $x_{j_s,k}$  tend vers un nombre complexe  $\lambda_s$  dans  $\mathbb{C}$  pour  $s = 1, \dots, q$ . Ce second ensemble peut être vide. Notons que l’ensemble  $\{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q\}$  est égal à l’ensemble  $\{1, \dots, n\}$ .

Rappelons que nous pouvons nous restreindre aux suites  $\{\xi_k\}$  tendant vers l’infini telles que chaque coordonnée ou bien tend vers l’infini ou bien converge vers un nombre complexe.

**Définition 4.1.2.** Soit l’application polynomiale  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  telle que  $S_F \neq \emptyset$ . Prenons  $a \in S_F$ , alors il existe au moins une suite  $\{\xi_k\} \subset \mathbb{C}^n$  telle que  $\xi_k$  tende vers l’infini et  $F(\xi_k)$  tende vers  $a$ . Nous définissons :

- 1)  $\kappa_0(\xi_k, a) := \kappa_0(\xi_k)$ ,
- 2)  $\Xi_0(a) := \{\kappa_0(\xi_k, a) : \exists \xi_k, \xi_k \rightarrow \infty, F(\xi_k) \rightarrow a\}$ ,
- 3)  $or_0(a) := \sharp(\Xi_0(a))$ .

**Définition 4.1.3.** Nous disons que deux points  $a_1$  et  $a_2$  de l’ensemble  $S_F$  sont *dans la même composante définie par  $\Xi_0$*  si  $\Xi_0(a_1) = \Xi_0(a_2)$ . Cette définition détermine une partition de  $S_F$ . Nous disons que cette partition est la partition définie par  $\Xi_0$ .

**Exemple 4.1.4.** Dans l’exemple 4.0.4, la partition de l’ensemble  $S_F$  définie par  $\Xi_0$  est une stratification, donnée par la filtration :

$$S_F \supset 0\alpha_2 \cup 0\alpha_3 \supset \{0\} \supset \emptyset.$$

Dans cet exemple,

pour un point  $a \in S_F \setminus (0\alpha_2 \cup 0\alpha_3)$ , nous avons  $\Xi_0(a) = \{(2, 3)[1]\}$ ,  
pour un point  $a \in 0\alpha_2 \setminus \{0\}$ , nous avons  $\Xi_0(a) = \{(2)[1, 3], (2, 3)[1]\}$ ,  
pour un point  $a \in 0\alpha_3 \setminus \{0\}$ , nous avons  $\Xi_0(a) = \{(3)[1, 2], (2, 3)[1]\}$ ,  
pour l'origine  $0$ , nous avons  $\Xi_0(0) = \{(2)[1, 3], (3)[1, 2], (2, 3)[1]\}$ .

Cependant, la partition précédente n'est pas toujours une stratification, comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 4.1.5.** Soit l'application polynomiale  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  telle que

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - 1, x_2 + 2, (x_1^2 - 1)(x_2 + 2)x_3),$$

alors

$$S_F = S_{F_1} \cup S_{F_2} \text{ où } S_{F_1} = \{\alpha_1 = 0\}, S_{F_2} = \{\alpha_2 = 0\}.$$

Soit un point  $a = (0, \alpha_2, \alpha_3) \in S_{F_1}$ , il existe une suite  $\left\{\left(1 + \frac{1}{k}, \alpha_2 - 2, \frac{k\alpha_3}{2\alpha_2}\right)\right\}$  si  $\alpha_2 \neq 0$ , et  $\left\{\left(1 + \frac{1}{k}, \frac{1}{k} - 2, \frac{\alpha_3 k^2}{2}\right)\right\}$  si  $\alpha_2 = 0$ , telle que son image tend vers  $a$ . Donc nous avons  $\Xi_0(a) = \{(3)[1, 2]\}$ .

Soit un point  $a = (\alpha_1, 0, \alpha_3) \in S_{F_2}$ , il existe une suite  $\left\{\left(\sqrt{1 + \alpha_1}, \frac{1}{k} - 2, \frac{k\alpha_3}{\alpha_1}\right)\right\}$  si  $\alpha_1 \neq 0$ , et  $\left\{\left(1 + \frac{1}{k}, \frac{1}{k} - 2, \frac{\alpha_3 k^2}{2}\right)\right\}$  si  $\alpha_1 = 0$ , telle que son image tend vers  $a$ . Il vient  $\Xi_0(a) = \{(3)[1, 2]\}$ .

Donc la partition de  $S_F$  définie par  $\Xi_0$  consiste en une seule composante de dimension 2, laquelle n'est pas lisse.

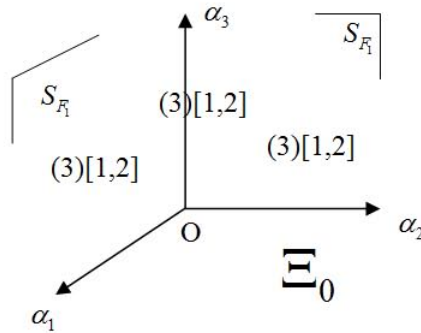


FIGURE 4.16 – La partition de  $S_F$  définie par  $\Xi_0$ , pour l'application polynomiale dominante  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - 1, x_2 + 2, (x_1^2 - 1)(x_2 + 2)x_3)$

**Remarque 4.1.6.** D'après l'exemple 4.1.5, nous devons donc raffiner la partition de  $S_F$  définie par  $\Xi_0$  pour définir une stratification de  $S_F$ . Dans l'exemple 4.1.5, la

partition de l'ensemble  $S_F$  définie par  $\Xi_0$  a seulement une composante de dimension 2 qui n'est pas lisse et la partie singulière est l'axe  $0\alpha_3$ . Afin de définir une stratification de l'ensemble  $S_F$ , nous nous proposons de déterminer ce qui différencie les suites tendant vers des points de ces composantes.

Pour un point courant  $a = (0, \alpha_2, \alpha_3)$  de  $0\alpha_2\alpha_3 \setminus 0\alpha_3$ , nous voyons que la suite  $\left\{ \left( 1 + \frac{1}{k}, \alpha_2 - 2, k \frac{\alpha_3}{2\alpha_2} \right) \right\}$  tend vers l'infini et son image tend vers  $a$ . La première coordonnée tend vers une valeur fixée 1 mais la deuxième coordonnée tend vers un nombre complexe  $\alpha_2 - 2$  dépendant du point  $a$ . La troisième coordonnée tend vers l'infini.

Pour un point courant  $a = (\alpha_1, 0, \alpha_3)$  de  $0\alpha_1\alpha_3 \setminus 0\alpha_3$ , nous voyons que la suite  $\left\{ \left( \sqrt{1 + \alpha_1}, \frac{1}{k} - 2, \frac{k\alpha_3}{\alpha_1} \right) \right\}$  tend vers l'infini et son image tend vers  $a$ . La première coordonnée tend vers un nombre complexe  $\sqrt{1 + \alpha_1}$  dépendant du point  $a$ . La deuxième coordonnée tend vers une valeur fixée  $-2$ . La troisième coordonnée tend vers l'infini.

Enfin soit  $a$  un point courant de  $0\alpha_3$  et regardons les suites  $\left\{ \left( 1 + \frac{1}{k}, \frac{1}{k} - 2, \frac{\alpha_3 k^2}{2} \right) \right\}$  dont l'image tend vers  $a$  : maintenant la première et la deuxième coordonnées tendent vers des valeurs fixées dans  $\mathbb{C}$  qui ne dépendent pas du point  $a$  quand  $a$  décrit  $0\alpha_3$ , et la troisième coordonnée tend vers l'infini.

Nous allons en fait distinguer ces façons de tendre vers l'infini en trois façons que nous allons formaliser dans la définition 4.2.17, page 78 dans la partie suivante :

## 4.2 Partition de $S_F$ définie par $\Xi$

**Remarque 4.2.1.** Soit  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application polynomiale dominante telle que  $S_F \neq \emptyset$ . Soient  $S_\nu$  les composantes de la partition de  $S_F$  définie par  $\Xi_0$ . Pour tout point  $a$  dans  $S_\nu$ , il existe des suites  $\{\xi_k^a\} = \{(x_{1,k}^a, \dots, x_{n,k}^a)\}$  telles que  $F(\xi_k^a)$  tend vers  $a$ . Les coordonnées  $x_{1,k}^a, \dots, x_{n,k}^a$  se répartissent donc en 3 groupes disjoints suivants :

- i)  $x_{i_r,k}^a$  tend vers l'infini, pour un groupe  $I = \{i_1, \dots, i_p\}$  de coordonnées,
- ii)  $x_{j_s,k}^a$  tend vers un nombre complexe  $\lambda_{j_s}^a \in \mathbb{C}$ , pour un groupe  $J = \{j_1, \dots, j_q\}$  de coordonnées, où  $\lambda_{j_s}^a$  est indépendant du point  $a$  quand  $a$  décrit  $S_\nu$ ,
- iii)  $x_{l_t,k}^a$  tend vers un nombre complexe  $\mu_{l_t}^a \in \mathbb{C}$ , pour un groupe  $L = \{l_1, \dots, l_\vartheta\}$  de coordonnées, où  $\mu_{l_t}^a$  dépend du point  $a$  quand  $a$  décrit  $S_\nu$ .

Notons que l'ensemble  $I$  n'est jamais vide, mais les ensembles  $J$  et  $L$  peuvent être vides.

**Exemple 4.2.2.** 1) Considérons l'exemple 4.0.4 de l'application polynomiale dominante  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1x_2, x_1x_3)$ . Prenons un point  $a = (0, \alpha_2, \alpha_3)$  dans  $S_F$  tel que  $\alpha_2, \alpha_3 \neq 0$ , alors il existe une suite  $\left\{ \left( \frac{1}{k}, k\alpha_2, k\alpha_3 \right) \right\}$  tendant vers l'infini et telle que son image tend vers  $a$ . Si  $a$  décrit  $(0\alpha_2\alpha_3) \setminus (0\alpha_2 \cup 0\alpha_3)$ , alors la première

coordonnée tend toujours vers 0. Dans ce cas, nous avons  $I = (2, 3)$ ,  $J = (1)$  et  $L = \emptyset$ .

2) Considérons maintenant l'exemple 4.1.5 de l'application polynomiale dominante  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - 1, x_2 + 2, (x_1^2 - 1)(x_2 + 2)x_3)$ . Prenons un point  $a = (0, \alpha_2, \alpha_3)$  dans  $S_F$  tel que  $\alpha_2 \neq 0$ , alors il existe des suites  $\left\{ \left( 1 + \frac{1}{k}, \alpha_2 - 2, \frac{k\alpha_3}{2\alpha_2} \right) \right\}$  tendant vers l'infini et telles que leur image tende vers  $a$ . Si nous laissons  $a$  varier dans  $(0\alpha_2\alpha_3) \setminus (0\alpha_2 \cup 0\alpha_3)$ , alors la première coordonnée tend vers une valeur fixée 1 mais la deuxième coordonnée tend vers une valeur variable dans  $\mathbb{C}$ , dépendant du point  $a$ . Dans ce cas, nous avons  $I = (3)$ ,  $J = (1)$  et  $L = (2)$ .

3) Considérons l'application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  telle que  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1(x_2 - x_3), x_2^2 - x_3^2, x_2^2 - x_1^2)$ . Alors l'ensemble  $S_F$  est le plan  $\alpha_2 = 2\alpha_1$  avec la suite  $\{\xi_k\}$  de la forme  $\left\{ \left( k + \frac{\lambda}{k}, k + \frac{\mu}{k}, k + \frac{\nu}{k} \right) \right\}$ . Dans ce cas, nous avons  $I = (1, 2, 3)$  et  $J = L = \emptyset$ .

**Remarque 4.2.3.** En fait, quand nous fixons un point  $a$  dans  $S_\nu$ , cela signifie que nous regardons “ponctuellement”  $S_F$ . Mais quand nous laissons le point  $a$  courir dans  $S_\nu$ , cela signifie que nous regardons “globalement”  $S_F$ . Nous voyons que dans l'exemple 4.1.5, un point  $a$  de l'axe  $0\alpha_3$  est lisse (régulier) localement, considéré dans l'axe  $0\alpha_3$  mais il n'est pas lisse (il est singulier) globalement, considéré dans  $S_F$ . C'est la raison pour laquelle nous devons remplacer la définition 4.1.3 par une autre définition (la définition 4.2.17, page 78) en regardant globalement  $S_F$  définie par  $\Xi_0$  afin de subdiviser les composantes  $S_\nu$  en strates lisses.

Nous souhaitons comprendre la nature des coordonnées dans les groupes d'indices  $I$ ,  $J$  et  $L$  de la remarque 4.2.1. Plus précisément, connaissant déjà le groupe  $I$  d'indices de coordonnées telles que  $x_{i_r, k}^a$  tende vers l'infini, nous nous proposons de donner une méthode pour distinguer entre les coordonnées  $x_{j_s, k}^a$  et  $x_{l_t, k}^a$  contribuant aux groupes  $J$  et  $L$ .

Soit donc  $F : \mathbb{C}_x^n \rightarrow \mathbb{C}_\alpha^n$  une application polynomiale dominante de coordonnées  $F = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ . Notons  $a$  un point d'une composante  $S_\nu$  de dimension  $n - 1$  de  $S_F$ , définie par  $\Xi_0$ . Soit  $\{\xi_k^a\} = \{(x_{1, k}^a, \dots, x_{n, k}^a)\}$  une suite de  $\mathbb{C}_x^n$  telle que  $\{\xi_k^a\}$  tend vers l'infini et  $F(\xi_k^a)$  tend vers  $a$ .

Dire que  $\{\xi_k^a\}$  tend vers l'infini implique que l'une des coordonnées au moins tend vers l'infini avec  $k$  (l'ensemble  $I$  est non vide). Nous pouvons supposer que cette coordonnée est la première,  $x_{1, k}^a$ . Si les autres coordonnées étaient fixées, alors  $F((x_{1, k}^a, x_2, \dots, x_n))$  tendrait vers l'infini. Puisque ceci n'est pas le cas et que  $F(\xi_k^a)$  tend vers  $a$ , cela implique que l'une (au moins) des autres coordonnées  $(x_{2, k}^a, \dots, x_{n, k}^a)$  apparaît dans les polynômes coordonnées contenant  $x_{1, k}^a$  de façon à compenser le fait que  $x_{1, k}^a$  tende vers l'infini, ceci en faisant apparaître une forme ou bien de type  $0 \times \infty$  ou bien de type  $\infty - \infty$ , mais dont la limite est finie et bien déterminée. Avant d'écrire cela de façon “systématique”, illustrons notre propos par trois exemples :

**Exemple 4.2.4.** Revenons à l'exemple 4.1.5 de l'application

$$F(x_1, x_2, x_3) = (F_1, F_2, F_3) = (x_1^2 - 1, x_2 + 2, (x_1^2 - 1)(x_2 + 2)x_3).$$

Prenons un point  $a = (0, \alpha_2, \alpha_3)$  dans  $S_F$  tel que  $\alpha_2 \neq 0$ . Considérons la suite  $\{\xi_k^a\} = \{(x_{1,k}^a, x_{2,k}^a, x_{3,k}^a)\}$ , définie par  $x_{1,k}^a = 1 + \frac{1}{k}$ ,  $x_{2,k}^a = \alpha_2 - 2$  et  $x_{3,k}^a = \frac{k\alpha_3}{2\alpha_2}$ . Cette suite tend vers l'infini et son image  $F(\xi_k^a)$  tend vers  $a$ .

La coordonnée  $F_3(x_1, x_2, x_3)$  peut s'écrire comme produit

$$F_3 = F_3^1 F_3^2 F_3^4,$$

où  $F_3^1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 1$ ,  $F_3^2(x_1, x_2, x_3) = x_3$  et  $F_3^4(x_1, x_2, x_3) = x_2 + 2$ . Ici,  $F_3^1(\xi_k^a)$  tend vers 0,  $F_3^2(\xi_k^a)$  tend vers l'infini et  $F_3^4(\xi_k^a)$  tend vers une valeur complexe (dépendant du point  $a$ ).

Ici, la coordonnée  $x_{3,k}^a$  tend vers l'infini et  $x_{1,k}^a$  est la coordonnée qui "compense", alors que la coordonnée  $x_2$  est "libre". Nous avons  $I = (3)$ ,  $J = (1)$  et  $L = (2)$ .

**Exemple 4.2.5.** Soit l'application polynomiale  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3, x_4)}^4 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)}^4$  telle que

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2 - 1, x_2 + 2, x_2 + x_3, (x_1^2 - 1)(x_2 + 2)(x_2 + x_3)x_4).$$

Alors l'ensemble  $S_F$  est l'union de trois hypersurfaces

$$S_{F_1} : \alpha_1 = 0, \quad S_{F_2} : \alpha_2 = 0, \quad S_{F_3} : \alpha_3 = 0.$$

i) Pour un point  $a = (0, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  dans  $S_{F_1}$  tel que  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \neq 0$ , il existe une suite  $\{\xi_k\} = \left\{ \left( 1 + \frac{1}{k}, \alpha_2 - 2, 2 - \alpha_2 + \alpha_3, \frac{k\alpha_4}{2\alpha_2\alpha_3} \right) \right\}$  tendant vers l'infini telle que  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$ . La coordonnée  $F_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$  peut s'écrire comme produit

$$F_4 = F_4^1 F_4^2 F_4^4,$$

où  $F_4^1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 1$ ,  $F_4^2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4$  et  $F_4^4(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + 2)(x_2 + x_3)$ . Ici,  $F_4^1(\xi_k^a)$  tend vers 0,  $F_4^2(\xi_k^a)$  tend vers l'infini et  $F_4^4(\xi_k^a)$  tend vers une valeur complexe (dépendant du point  $a$ ).

Donc nous avons  $I = (4)$ ,  $J = (1)$  et  $L = (2, 3)$ .

ii) Pour un point  $a = (\alpha_1, 0, \alpha_3, \alpha_4)$  dans  $S_{F_2}$  tel que  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4 \neq 0$ , il existe une suite  $\{\xi_k\} = \left\{ \left( \sqrt{1 + \alpha_1}, -2 + \frac{1}{k}, -\frac{1}{k} + 2 + \alpha_3, \frac{k\alpha_4}{\alpha_1\alpha_3} \right) \right\}$  tendant vers l'infini telle que  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$ . La coordonnée  $F_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$  peut s'écrire comme produit

$$F_4 = F_4^1 F_4^2 F_4^3 F_4^4,$$

où  $F_4^1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 + 2$ ,  $F_4^2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4$ ,  $F_4^3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 + x_3$  et  $F_4^4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 1$ .

Donc nous avons  $I = (4)$ ,  $J = (2)$  et  $L = (2, 3)$ .

iii) Pour un point  $a = (\alpha_1, \alpha_2, 0, \alpha_4)$  dans  $S_{F_3}$  tel que  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 \neq 0$ , il existe une suite  $\{\xi_k\} = \left\{ \left( \sqrt{1 + \alpha_1}, \alpha_2 - 2, 2 - \alpha_2 + \frac{1}{k}, \frac{k\alpha_4}{\alpha_1\alpha_2} \right) \right\}$  tendant vers l'infini telle que  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$ . La coordonnée  $F_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$  peut s'écrire comme produit

$$F_4 = F_4^1 F_4^2 F_4^4,$$

où  $F_4^1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3)$ ,  $F_4^2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4$  et  $F_4^4(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2 - 1)(x_2 + 2)$ . Ici,  $F_3^1(\xi_k^a)$  tend vers 0,  $F_3^2(\xi_k^a)$  tend vers l'infini et  $F_3^4(\xi_k^a)$  tend vers une valeur complexe (dépendant du point  $a$ ).

Donc nous avons  $I = (4)$  et  $L = (1, 2, 3)$ .

**Exemple 4.2.6.** Considérons l'application polynomiale dominante

$$F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3 \quad F(x_1, x_2, x_3) = (x_1(x_2 - x_3), x_2^2 - x_3^2, x_2^2 - x_1^2).$$

L'ensemble  $S_F$  est le plan  $\alpha_2 = 2\alpha_1$ . La suite de la forme  $\left\{ \left( k + \frac{\lambda}{k}, k + \frac{\mu}{k}, k + \frac{\nu}{k} \right) \right\}$  tend vers l'infini tandis que  $F(\xi_k)$  tend vers  $a = (\alpha_1, 2\alpha_1, 0)$ . Nous avons

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1^1 F_1^2 \text{ où } F_1^1 = x_2 - x_3 \text{ et } F_1^2 = x_1, \\ F_2 &= F_2^1 F_2^2 \text{ où } F_2^1 = x_2 - x_3 \text{ et } F_2^2 = x_2 + x_3, \\ F_3 &= F_3^1 F_3^2 \text{ où } F_3^1 = x_2 - x_1 \text{ et } F_3^2 = x_2 + x_1. \end{aligned}$$

Dans ce cas, nous avons  $I = (1, 2, 3)$  et  $J = L = \emptyset$ .

**Remarque 4.2.7.** En fait, le 3-uple  $(I, J, L)$ , correspondant au point  $a$  dans  $S_F$ , fournit une “direction” dans le système de coordonnées “OIJL”.

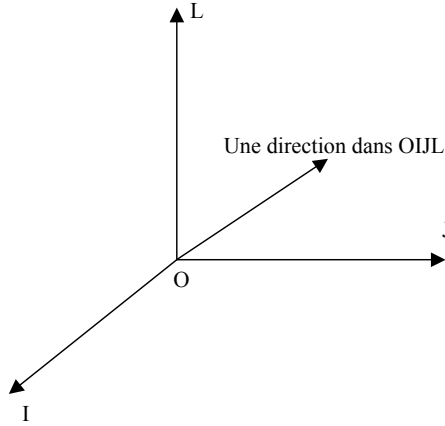


FIGURE 4.17 – Direction dans OIJL

Afin de donner une définition systématique des polynômes  $F_m^i(x)$ , en particulier de la notion de “compensation par le même degré”, nous avons besoin de la définition suivante :

**Définition 4.2.8.** Soient deux suites  $x_k$  et  $x'_k$  dans  $\mathbb{C}$  telles que  $x_k$  tend vers 0 et  $x'_k$  tend vers l’infini. Nous dirons que :

1) la suite  $x_k$  tend vers 0 avec le même degré que celui avec lequel la suite  $x'_k$  tend vers l’infini si et seulement s’il existe un entier naturel  $t \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$x_k \sim (1/k)^t, \quad x'_k \sim k^t.$$

Ici,  $x_k \sim (1/k)^t$  signifie que  $x_k = (1/k)^t + \dots$ , où les éléments dans “ $\dots$ ” sont de la forme  $(1/k)^r$  où  $r > t$ . De la même façon,  $x'_k \sim k^t$  signifie que  $x'_k = k^t + \dots$ , où les éléments dans “ $\dots$ ” sont de la forme  $k^r$  où  $r < t$ ,

2) la suite  $x_k$  tend vers 0 avec un degré plus grand que celui avec lequel la suite  $x'_k$  tend vers l’infini si et seulement s’il existe deux entiers naturels  $t, t' \in \mathbb{N}^*$  tels que  $t > t'$  et

$$x_k \sim (1/k)^t, \quad x'_k \sim k^{t'},$$

3) la suite  $x_k$  tend vers 0 avec un degré plus petit que celui avec lequel la suite  $x'_k$  tend vers l’infini si et seulement s’il existe deux entiers naturels  $t, t' \in \mathbb{N}^*$  tels que  $t < t'$  et

$$x_k \sim (1/k)^t, \quad x'_k \sim k^{t'}.$$

De la même manière, nous avons les définitions des suites tendant vers 0 (*resp.* l’infini) avec les mêmes degrés, avec les degrés plus petits ou avec les degrés plus grands.

Nous disons que la suite constante  $x_k = 0$  est de degré  $-\infty$ .

**Remarque 4.2.9.** Considérons un point  $a$  d’une composante  $S_\nu$  de la dimension la plus grande de  $S_F$  et soit  $\{\xi_k^a\}$  une suite tendant vers l’infini telle que  $F(\xi_k^a)$  tend vers  $a$ . Pour  $m = 1, \dots, n$ , nous pouvons écrire les polynômes coordonnées  $F_m(x)$  comme :

1) ou bien  $F_m(x) = F_m^1(x)$  où  $F_m^1(\xi_k^a)$  tend vers 0.

2) ou bien une combinaison linéaire de produits d’éléments de la forme :

$$F_m(x) = F_m^1(x)F_m^2(x)F_m^3(x)F_m^4(x) + F'_m(x), \quad (4.2.10)$$

où :

i)  $F'_m(x) = 0$  ou  $F'_m(\xi_k^a)$  tend vers un nombre complexe fixé dans  $\mathbb{C}$ , quand  $a$  décrit dans  $S_\nu$ ,

ii)  $F_m^1(x) = F_m^2(x) = 1$  ou  $F_m^1(\xi_k^a)$  tend vers 0 avec le même degré que celui avec lequel  $F_m^2(\xi_k^a)$  tend vers l’infini,

iii)  $F_m^3(x) = 1$  ou  $F_m^3(\xi_k^a)$  tend vers un nombre complexe quelconque dans  $\mathbb{C}$  mais dans  $F_m^3(\xi_k^a)$  apparaissent des coordonnées tendant vers *un nombre complexe fixé* (i.e. indépendant du point  $a$  ou tendant vers l'infini,

iv)  $F_m^4(x) = 1$  ou contient des variables “libres”, cela signifie que  $F_m^4(\xi_k^a)$  tend vers *un nombre complexe quelconque* (i.e. dépendant du point  $a$ , mais il ne contient pas de coordonnée tendant vers un nombre complexe fixé ou vers l'infini.

Dans tous les cas, les groupe  $I$  et  $J$  sont contenus dans l'ensemble des indices  $i_r$  qui apparaissent dans les polynômes  $F_m^i(x)$  si  $F_m^i(x) \neq 1$ , pour  $i = 1, 2, 3$  et pour tous les  $m$ . Le groupe  $L$  est le complément dans  $\{1, \dots, n\}$ .

**Remarque 4.2.11.** La décomposition 4.2.10 est unique à constante multiplicative près.

Les exemples suivants éclairent la remarque ci-dessus :

**Exemple 4.2.12.** Considérons l'application polynomiale dominante

$$F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3; \quad F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2, x_2 x_3, x_1 x_2 - x_2 x_3 + x_2).$$

L'ensemble  $S_F$  est le plan  $\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2$ . La suite  $\{\xi_k\} = \{(\lambda k, \frac{1}{k}, \mu k)\}$  tend vers l'infini tandis que  $F(\xi_k)$  tend vers  $a = (\lambda, \mu, \lambda - \mu)$ . Nous avons

$$F_1 = F_1^1 F_1^2 \text{ où } F_1^1 = x_2 \text{ et } F_1^2 = x_1,$$

$$F_2 = F_2^1 F_2^2 \text{ où } F_2^1 = x_2 \text{ et } F_2^2 = x_3,$$

$$F_3 = F_3^1 F_3^2 + F_3^{*1} F_3^{*2} + F_3' \text{ où } F_3^1 = x_2, F_3^2 = x_1, F_3^{*1} = x_2, F_3^{*2} = x_3 \text{ et } F_3' = x_2.$$

Dans ce cas, nous avons  $I = (1, 3)$   $J = (2)$  et  $L = \emptyset$ .

**Exemple 4.2.13.** Soit l'application polynomiale  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^4$  telle que

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((x_1 - 1) + x_2, x_2 + 2, (x_1 - 1)(x_2 + 2)(x_1 + x_2)x_3 + x_1).$$

L'ensemble  $S_F$  est l'union de deux hypersurfaces

$$S_{F_1} : \alpha_1 = \alpha_2 - 2, \quad S_{F_2} : \alpha_2 = 0.$$

Prenons un point  $a = (\alpha_1, \alpha_1 + 2, \alpha_3)$  dans  $S_{F_1}$ , alors il existe une suite  $\{\xi_k\} = \{(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})\}$  telle que  $x_{2,k}$  tend vers un nombre complexe  $\lambda$  quelconque,  $x_{1,k} - 1$  tend vers 0,  $x_{3,k}$  tend vers l'infini et  $(x_{1,k} - 1)x_{3,k}$  tend vers un nombre complexe quelconque  $\mu$ . Nous avons

$$F_1 = F_1^1 F_1^2 F_1^3 F_1^4 + F_1' \text{ où } F_1^1 = F_1^2 = 1, F_1^3 = 1, F_1^4 = x_2 \text{ et } F_1' = (x_1 - 1),$$

$$F_2 = F_2^1 F_2^2 F_2^3 F_2^4 \text{ où } F_2^1 = F_2^2 = 1, F_2^3 = 1 \text{ et } F_2^4 = x_2 + 2,$$

$$F_3 = F_3^1 F_3^2 F_3^3 F_3^4 + F_3' \text{ où } F_3^1 = x_1 - 1, F_3^2 = x_3, F_3^3 = x_1 + x_2, F_3^4 = x_2 \text{ et } F_3' = x_1.$$

Dans ce cas, nous avons  $I = (1)$   $J = (3)$  et  $L = (2)$ .



**Définition 4.2.14.** Soit  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application polynomiale dominante telle que  $S_F \neq \emptyset$ . Soit  $S_\nu$  une composante de  $S_F$  de la partition définie par  $\Xi_0$ . Pour tout  $a \in S_\nu$ , il existe une suite  $\{\xi_k^a\} = \{(x_{1,k}^a, \dots, x_{n,k}^a)\}$  tendant vers l'infini telle que  $F(\xi_k^a)$  tende vers  $a$ . Nous définissons :

1) “une façon de tendre vers l'infini pour la suite  $\{\xi_k^a\}$  selon le point  $a$  dans  $S_\nu$ ” comme :

$$\kappa(\xi_k^a) = (i_1, \dots, i_p)[j_1, \dots, j_q]$$

si

$$\begin{cases} x_{i_r,k}^a \rightarrow \infty \text{ pour tout } r = 1, \dots, p, \\ x_{j_s,k}^a \rightarrow \lambda_{j_s}^a \equiv \text{const.} \in \mathbb{C} \text{ pour tout } s = 1, \dots, q, \\ \text{où } \{\lambda_{j_s}^a\} \text{ ne dépend pas de } a \text{ lorsque } a \text{ décrit } S_\nu, \end{cases}$$

$$2) \Xi(a) := \{\kappa(\xi_k^a) : \xi_k^a \rightarrow \infty, F(\xi_k^a) \rightarrow a\},$$

$$3) or(a) := \#(\Xi(a)),$$

c'est-à-dire,  $or(a)$  est le nombre de façons de tendre vers l'infini pour les suites dont l'image tend vers  $a$ .

Nous appelons aussi “façon de tendre vers l'infini pour la suite  $\{\xi_k^a\}$ ” la façon correspondante à la suite  $\{\xi_k^a\}$ . Une façon de tendre vers l'infini pour la suite  $\{\xi_k^a\}$  selon le point  $a$  dans  $S_F$  sera appelée simplement une façon dans  $S_F$ .

**Définition 4.2.15.** Nous disons que deux suites  $\{\xi_k^1\}$  et  $\{\xi_k^2\}$  dans  $\mathbb{C}_x^n$ , telles que  $\xi_k^1$  et  $\xi_k^2$  tendent vers l'infini, sont *équivalentes* et nous notons  $\xi_k^1 \sim \xi_k^2$ , si  $\kappa(\xi_k^1) = \kappa(\xi_k^2)$ .

**Remarque 4.2.16.** La relation ci-dessus est une relation d'équivalence. Si deux suites  $\{\xi_k^1\}$  et  $\{\xi_k^2\}$  tendant vers l'infini sont équivalentes, alors nous disons que  $\xi_k^1$  et  $\xi_k^2$  tendent vers l'infini “de la même façon”.

**Définition 4.2.17.** Soit  $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application polynomiale dominante telle que  $S_F \neq \emptyset$ . Pour  $n \geq 3$ , nous disons que deux points  $a_1, a_2$  d'une composante de la partition de  $S_F$  définie par  $\Xi$  sont dans la même composante définie par  $\Xi$  si et seulement si

$$\Xi(a_1) = \Xi(a_2).$$

Cette définition détermine une partition de  $S_F$  et nous disons que cette partition est la partition définie par  $\Xi$ .

Pour un point  $a$  dans une strate de cette partition, nous disons qu'un élément de  $\Xi(a)$  est une façon de cette strate.

**Remarque 4.2.18.** La définition 4.2.17 est plus précise que la définition 4.1.3 précédente. Il est clair que l'ensemble d'indices  $[k_{j_1}, \dots, k_{j_q}]$  de  $\Xi(a)$  est contenu dans l'ensemble d'indices  $[k_{j'_1}, \dots, k_{j'_q}]$  de  $\Xi_0(a)$ . La différence entre la partition de  $S_F$  par  $\Xi_0$  et la partition de  $S_F$  par  $\Xi$  est que nous regardons  $S_F$  “localement” (pour  $\Xi_0$ ) et “globalement” (pour  $\Xi$ ).

**Remarque 4.2.19.** Pour chaque  $a$  dans  $S_F$ , nous avons  $or_0(a) = or(a)$ .

En effet, pour chaque point  $a \in S_F$ , nous remplaçons une façon de tendre vers l'infini  $(k_i)[k_j] \in \Xi_0(a)$  par une façon  $(k_i)[k'_j] \in \Xi(a)$ , où  $\{k'_j\} \subset \{k_j\}$ . Donc  $or(a)$  ne change pas.

Nous donnons ci-dessous des exemples pour lesquels la partition de  $S_F$  définie par  $\Xi$  nous fournit une stratification de  $S_F$ , nous l'appelons *stratification de  $S_F$  définie par  $\Xi$*  :

**Exemple 4.2.20.** Revenons à l'exemple 4.1.5 pour voir qu'avec la partition définie par  $\Xi$  (définition 4.2.17), les composantes de dimension  $n - 1$  de  $S_F$  sont lisses.

En fait, nous voyons qu'avec cette définition, nous avons  $\Xi(a) = \{(3)[1]\}$  pour les points  $a$  de  $S_{F_1} \setminus (S_{F_1} \cap S_{F_2}) = 0\alpha_2\alpha_3 \setminus 0\alpha_3$  et nous avons  $\Xi(a) = \{(3)[2]\}$  pour les points  $a$  de  $S_{F_2} \setminus (S_{F_1} \cap S_{F_2}) = 0\alpha_1\alpha_3 \setminus 0\alpha_3$ . Enfin, nous avons  $\Xi(a) = \{(3)[1, 2]\}$  pour les points  $a$  de  $S_{F_1} \cap S_{F_2} = 0\alpha_3$ . La composante de dimension  $n - 1$  de  $S_F$  par  $\Xi_0$  (en fait, c'est  $S_F$ ) est subdivisée en strates lisses et une stratification de  $S_F$ , définie par  $\Xi$ , est donnée par la filtration suivante :

$$S_F \supset 0\alpha_3 \supset \emptyset.$$

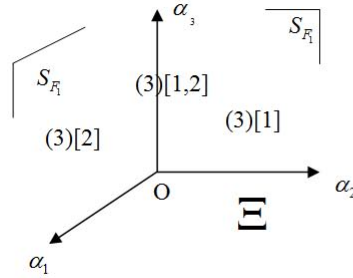


FIGURE 4.18 – La partition de  $S_F$  définie par  $\Xi$ , pour l'application polynomiale dominante  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - 1, x_2 + 2, (x_1^2 - 1)(x_2 + 2)x_3)$

L'exemple suivant nous aide à mieux comprendre la partition de  $S_F$  définie par  $\Xi$ , ainsi que la différence entre les partitions de  $S_F$  définies par  $\Xi_0$  et par  $\Xi$  sur les strates de dimension la plus grande.

**Exemple 4.2.21.** Soit l'application polynomiale  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3, x_4)}^4 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)}^4$  telle que

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2 - 1, x_2 + 2, x_2 + x_3, (x_1^2 - 1)(x_2 + 2)(x_2 + x_3)x_4).$$

L'ensemble  $S_F$  est l'union de trois hypersurfaces

$$S_{F_1} : \alpha_1 = 0, \quad S_{F_2} : \alpha_2 = 0, \quad S_{F_3} : \alpha_3 = 0.$$

D'une part, nous avons  $\Xi_0(a) = (4)$  pour tout point  $a$  dans  $S_F$ . D'autre part, pour  $\Xi$ , nous avons :

i) Pour un point  $a = (0, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  dans  $S_{F_1}$  tel que  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \neq 0$ , il existe une suite  $\{\xi_k\} = \left\{ \left( 1 + \frac{1}{k}, \alpha_2 - 2, 2 - \alpha_2 + \alpha_3, \frac{k\alpha_4}{2\alpha_2\alpha_3} \right) \right\}$  tendant vers l'infini telle que  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$ . Nous avons  $\Xi(a) = \{(4)[1]\}$ .

ii) Pour un point  $a = (\alpha_1, 0, \alpha_3, \alpha_4)$  dans  $S_{F_2}$  tel que  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4 \neq 0$ , il existe une suite  $\{\xi_k\} = \left\{ \left( \sqrt{1 + \alpha_1}, -2 + \frac{1}{k}, -\frac{1}{k} + 2 + \alpha_3, \frac{k\alpha_4}{\alpha_1\alpha_3} \right) \right\}$  tendant vers l'infini telle que  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$ . Nous avons  $\Xi(a) = \{(4)[2]\}$ .

iii) Pour un point  $a = (\alpha_1, \alpha_2, 0, \alpha_4)$  dans  $S_{F_3}$  tel que  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 \neq 0$ , il existe une suite  $\{\xi_k\} = \left\{ \left( \sqrt{1 + \alpha_1}, \alpha_2 - 2, 2 - \alpha_2 + \frac{1}{k}, \frac{k\alpha_4}{\alpha_1\alpha_2} \right) \right\}$  tendant vers l'infini telle que  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$ . Nous avons  $\Xi(a) = \{(4)\}$ .

Les trois exemples suivants sont instructifs par le fait qu'ils fournissent des situations différentes de la stratification de l'ensemble  $S_F$ .

**Exemple 4.2.22.** Soit l'application  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  définie par

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, x_2x_3, x_1x_2x_3).$$

Alors l'ensemble  $S_F$  est égal à  $S_{F_1} \cup S_{F_2} \cup S_{F_3}$ , où  $S_{F_1} = \{\alpha_2 = 0\}$ ,  $S_{F_2} = \{\alpha_3 = 0\}$  et  $S_{F_3} = \{\alpha_1 = 0\}$ .

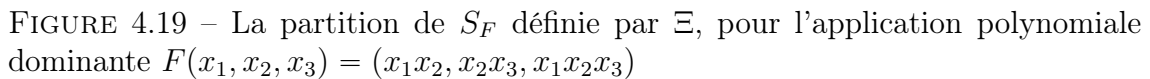
i) Pour un point  $a = (\alpha_1, 0, \alpha_3) \in S_{F_1}$  tel que  $\alpha_1 \neq 0$  et  $\alpha_3 \neq 0$ , il existe une classe de suites équivalentes  $[\{\xi_k\}] = \left[ \left\{ \left( k\alpha_1, \frac{1}{k}, \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right) \right\} \right]$  telles que  $\xi_k$  tend vers l'infini et  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$ . Nous avons  $\Xi(a) = \{(1)[2]\}$ .

ii) Pour un point  $a = (\alpha_1, \alpha_2, 0) \in S_{F_2}$  tel que  $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ , il existe une classe de suites équivalentes  $[\{\xi_k\}] = \left[ \left\{ \left( \frac{\alpha_1}{k}, k, \frac{\alpha_2}{k} \right) \right\} \right]$  telles que  $\xi_k$  tend vers l'infini et  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$ . Nous avons  $\Xi(a) = \{(2)[1, 3]\}$ .

iii) Pour un point  $a = (0, \alpha_2, \alpha_3) \in S_{F_3}$ , tel que  $\alpha_2, \alpha_3 \neq 0$ , il existe une classe d'équivalence de suites  $[\{\xi_k\}] = \left[ \left\{ \left( \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \frac{\alpha_2}{k}, k \right) \right\} \right]$  telles que  $\xi_k$  tend vers l'infini et  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$ . Nous avons  $\Xi(a) = \{(3)[2]\}$ .

iv) Pour un point  $a = (\alpha_1, 0, 0) \in S_{F_1} \cap S_{F_2}$ , il existe deux classes d'équivalence de suites  $[\{\xi_k^1\}] = \left[ \left\{ \left( k\alpha_1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \right\} \right]$  et  $[\{\xi_k^2\}] = \left[ \left\{ \left( \frac{1}{k}, k\alpha_1, \frac{1}{k^2} \right) \right\} \right]$  telles que  $\xi_k^1$  et  $\xi_k^2$  tendent vers l'infini et leurs images tendent vers  $a$ . Nous avons  $\Xi(a) = \{(1)[2, 3], (2)[1, 3]\}$ .

v) Pour un point  $a = (0, \alpha_2, 0) \in S_{F_2} \cap S_{F_3}$ , il existe deux classes d'équivalence de suites  $[\{\xi_k^1\}] = \left[ \left\{ \left( 0, k, \frac{\alpha_2}{k} \right) \right\} \right]$  et  $[\{\xi_k^2\}] = \left[ \left\{ \left( 0, \frac{\alpha_2}{k}, k \right) \right\} \right]$  telles que  $\xi_k^1, \xi_k^2$  tendent vers l'infini et leurs images tendent vers  $a$ . Nous avons  $\Xi(a) = \{(2)[1, 3], (3)[1, 2]\}$ .



vii) Enfin, considérons l'origine  $0 \in S_{F_1} \cap S_{F_2} \cap S_{F_3}$ , il existe quatre classes d'équivalence  $[\{(\lambda, \frac{1}{k^2}, k)\}]$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $[\{(k, 0, k)\}]$ ,  $[\{(\frac{1}{k^2}, k, 0)\}]$  et  $[\{(k, 0, \mu)\}]$  avec  $\mu \in \mathbb{C}$  telles que les suites tendent vers l'infini et leurs images tendent vers  $a$ . Donc nous avons

$$\Xi(a) = \{(3)[1, 2], (1, 3)[2], (2)[1, 3], (1)[2, 3]\}.$$

La stratification de l'ensemble  $S_F$ , définie par  $\Xi$ , est donnée par la filtration :

$$S_F \supset 0\alpha_1 \cup 0\alpha_2 \cup 0\alpha_3 \supset \{0\} \supset \emptyset.$$

**Exemple 4.2.23.** Soit l'application polynomiale  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3, x_4)}^4 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)}^4$  définie par

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_1).$$

Rappelons que cette application n'est pas dominante. L'ensemble  $S_F$  est égal à l'ensemble  $F(\mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3, x_4)}^4)$ , c'est l'hypersurface d'équation  $\alpha_1\alpha_3 = \alpha_2\alpha_4$ .

i) Prenons un point  $a = \left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2}\right) \in S_F$ , où  $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ . Il existe deux classes d'équivalence de suites  $\left[\left\{\left(\frac{1}{k}, k\alpha_1, \frac{\alpha_2}{\alpha_1 k}, \frac{\alpha_3 \alpha_1 k}{\alpha_2}\right)\right\}\right]$  et  $\left[\left\{\left(k, \frac{\alpha_1}{k}, \frac{\alpha_2 k}{\alpha_1}, \frac{\alpha_3 \alpha_1}{\alpha_2 k}\right)\right\}\right]$ ,

tendant vers l'infini et telles que leurs images tendent vers  $a$ . Nous avons  $\Xi(a) = \{(2, 4)[1, 3], (1, 3)[2, 4]\}$ .

ii) Prenons un point  $a = (0, 0, \alpha_3, \alpha_4) \in S_2^1$ , où  $\alpha_3 \neq 0$ . Il existe trois classes d'équivalence de suites  $\left[ \left\{ \left( \frac{\alpha_4}{\alpha_3 k}, \mu, \frac{1}{k}, \alpha_3 k \right) \right\} \right]$ , où  $\mu \in \mathbb{C}$ ;  $\left[ \left\{ \left( \frac{k\alpha_4}{\alpha_3}, 0, k, \frac{\alpha_3}{k} \right) \right\} \right]$ ; et  $\left[ \left\{ \left( \frac{\alpha_4}{k^2 \alpha_3}, k, \frac{1}{k^2}, k^2 \alpha_3 \right) \right\} \right]$  tendant vers l'infini telles que leurs images tendent vers  $a$ . Nous avons donc  $\Xi(a) = \{(4)[1, 2, 3], (1, 3)[2, 4], (2, 4)[1, 3]\}$ .

iii) Prenons un point  $a = (0, \alpha_2, \alpha_3, 0) \in S_2^2$ . Il existe trois classes d'équivalence de suites  $\left[ \left\{ \left( \lambda, \frac{\alpha_2}{k}, k, \frac{\alpha_3}{k} \right) \right\} \right]$ , où  $\lambda \in \mathbb{C}$ ;  $\left[ \left\{ \left( 0, \alpha_2 k, \frac{1}{k}, \alpha_3 k \right) \right\} \right]$ ; et  $\left[ \left\{ \left( k, \frac{1}{k^2}, \alpha_2 k^2, \frac{\alpha_3}{\alpha_2 k^2} \right) \right\} \right]$ , tendant vers l'infini telles que leurs images tendent vers  $a$ . Nous avons  $\Xi(a) = \{(3)[1, 2, 4], (2, 4)[1, 3], (1, 3)[2, 4]\}$ .

iv) Prenons un point  $a = (\alpha_1, 0, 0, \alpha_4) \in S_2^3$ , où  $\alpha_1 \neq 0$ . Il existe trois classes d'équivalence de suites  $\left[ \left\{ \left( \alpha_1 k, \frac{1}{k}, \mu, \frac{\alpha_4}{\alpha_1 k} \right) \right\} \right]$ , où  $\mu \in \mathbb{C}$ ;  $\left[ \left\{ \left( \frac{\alpha_1}{k}, k, 0, \frac{\alpha_4 k}{\alpha_1} \right) \right\} \right]$ ; et  $\left[ \left\{ \left( \alpha_4 k, 0, \alpha_3 k^2, \frac{1}{k^2} \right) \right\} \right]$  tendant vers l'infini telles que leurs images tendent vers  $a$ . Nous avons donc  $\Xi(a) = \{(1)[2, 3, 4], (2, 4)[1, 3], (1, 3)[2, 4]\}$ .

iv) Prenons un point  $a = (0, 0, \alpha_3, 0) \in S_1^1$ . Il existe quatre classes d'équivalence de suites  $\left[ \left\{ \left( \lambda, 0, \alpha_3 k, \frac{1}{k} \right) \right\} \right]$ ;  $\left[ \left\{ \left( 0, \mu, \frac{\alpha_3}{k}, k \right) \right\} \right]$ , où  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ;  $\left[ \left\{ \left( 0, k, \frac{1}{k^2}, k^2 \alpha_3 \right) \right\} \right]$ ; et  $\left[ \left\{ \left( k^2, 0, k, \frac{\alpha_3}{k} \right) \right\} \right]$ , tendant vers l'infini telles que leurs images tendent vers  $a$ . Nous avons donc  $\Xi(a) = \{(3)[1, 2, 4], (4)[1, 2, 3], (2, 4)[1, 3], (1, 3)[2, 4]\}$ .

v) Prenons un point  $a = (0, 0, 0, \alpha_4) \in S_1^2$ . Il existe quatre classes d'équivalence de suites  $\left[ \left\{ \left( \frac{1}{k}, \lambda, 0, \alpha_4 k \right) \right\} \right]$ ;  $\left[ \left\{ \left( k, 0, \mu, \frac{\alpha_4}{k} \right) \right\} \right]$ , où  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ;  $\left[ \left\{ \left( k, 0, k^2, \frac{\alpha_4}{k^2} \right) \right\} \right]$ ; et  $\left[ \left\{ \left( 0, k, \frac{\alpha_4}{k^2}, k^2 \right) \right\} \right]$ , tendant vers l'infini telles que leurs images tendent vers  $a$ . Nous avons donc  $\Xi(a) = \{(4)[1, 2, 3], (1)[2, 3, 4], (2, 4)[1, 3], (1, 3)[2, 4]\}$ .

vi) Considérons le point  $a = (0, 0, 0, 0) = S_2^1 \cap S_2^2 \cap S_2^3 = S_1^1 \cap S_1^2$ , il existe six classes d'équivalence de suites

$$\begin{aligned} & \left[ \left\{ (0, k, 0, k) \right\} \right], \left[ \left\{ (k, 0, k, 0) \right\} \right], \left[ \left\{ (0, k, 0, \lambda) \right\} \right], \\ & \left[ \left\{ (\mu, 0, k, 0) \right\} \right], \left[ \left\{ (k, 0, \nu, 0) \right\} \right], \left[ \left\{ (0, \eta, 0, k) \right\} \right], \end{aligned}$$

où  $\lambda, \mu, \nu, \eta \in \mathbb{C}$ , tendant vers l'infini et telles que leurs images tendent vers  $a$ . Alors nous avons

$$\Xi(a) = \{(2, 4)[1, 3], (1, 3)[2, 4], (2)[1, 3, 4], (3)[1, 2, 4], (1)[2, 3, 4], (4)[1, 2, 3]\}.$$

La stratification de l'ensemble  $S_F$ , définie par  $\Xi$ , est donc donnée par la filtration :

$$S_F \supset S_2^1 \cup S_2^2 \cup S_2^3 \supset S_1^1 \cup S_1^2 \supset \{0\} \supset \emptyset.$$

**Exemple 4.2.24.** Soit l'application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  telle que

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 x_2 x_3).$$

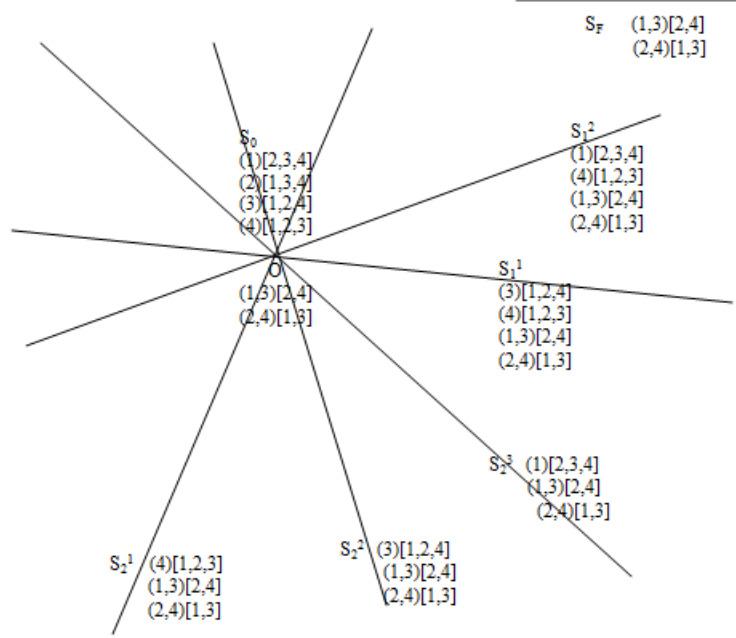


FIGURE 4.20 – La stratification de  $S_F$ , définie par  $\Xi$ , pour l'application polynomiale dominante  $F = (x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_1)$

Nous avons l'ensemble  $S_F = S_{F_1} \cup S_{F_2}$ , où  $S_{F_1} = \{\alpha_1 = 0\}$  et  $S_{F_2} = \{\alpha_2 = 0\}$ .

i) Pour un point  $a = (0, \alpha_2, \alpha_3) \in S_{F_1}$  tel que  $\alpha_2 \neq 0$ , il existe des suites tendant vers l'infini  $\left\{ \left( \frac{1}{k}, \alpha_2, \frac{k\alpha_3}{\alpha_2} \right) \right\}$  si  $\alpha_3 \neq 0$  et  $\left\{ \left( \frac{1}{k^2}, \alpha_2, k \right) \right\}$  si  $\alpha_3 = 0$  telles que leurs images tendent vers  $a$  et toutes les autres suites  $\{\xi_k\}$  tendant vers l'infini telles que  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$  sont “du même type”. Nous avons  $\Xi(a) = \{(3)[1]\}$ .

ii) Pour un point  $a = (\alpha_1, 0, \alpha_3) \in S_{F_2}$  tel que  $\alpha_1 \neq 0$ , il existe des suites tendant vers l'infini  $\left\{ \left( \alpha_1, \frac{1}{k}, \frac{k\alpha_3}{\alpha_1} \right) \right\}$  si  $\alpha_3 \neq 0$  et  $\left\{ \left( \alpha_1, \frac{1}{k^2}, k \right) \right\}$  si  $\alpha_3 = 0$  telles que leurs images tendent vers  $a$  et toutes les autres suites  $\{\xi_k\}$  tendant vers l'infini telles que  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$  sont “du même type”, nous avons  $\Xi(a) = \{(3)[2]\}$ .

iii) Pour un point  $a = (0, 0, \alpha_3) \in 0\alpha_3 = S_{F_1} \cap S_{F_2}$ , il existe des suites tendant vers l'infini  $\left\{ \left( \frac{1}{k}, \frac{1}{k}, k^2\alpha_3 \right) \right\}$  si  $\alpha_3 \neq 0$  et  $\left\{ \left( \frac{1}{k}, \frac{1}{k}, k \right) \right\}$  si  $\alpha_3 = 0$  telles que leurs images tendent vers  $a$  et toutes les autres suites  $\{\xi_k\}$  tendant vers l'infini telles que  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$  sont “du même type”. Nous avons  $\Xi(a) = \{(3)[1, 2]\}$ .

La stratification de  $S_F$ , définie par  $\Xi$ , est donnée par la filtration :

$$S_F \supset 0\alpha_3 \supset \emptyset.$$

**Remarque 4.2.25.** L'ensemble  $S_F$  et la stratification de  $S_F$  définie par  $\Xi$  ne sont pas “stables” par changement de variables, comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 4.2.26.** Revenons à l'application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  telle que  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1(x_2 - x_3), x_2^2 - x_3^2, x_2^2 - x_1^2)$ . Nous savons que l'ensemble  $S_F$  est le plan  $\alpha_2 = 2\alpha_1$  avec la suite de la forme  $\{(k + \frac{\lambda}{k}, k + \frac{\mu}{k}, k + \frac{\nu}{k})\}$ . Donc  $S_F$  est une hypersurface irréductible avec la façon  $\kappa = (1, 2, 3)$ .

Effectuons le changement de variables :

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2 - x_1, \quad x'_3 = x_2 - x_3.$$

L'application  $F$  devient l'application

$$F'(x'_1, x'_2, x'_3) = (x'_1 x'_3, x'_3(2x'_2 + 2x'_1 - x'_3), x'_2(x'_2 + 2x'_1)).$$

Alors  $S_{F'}$  est l'union deux hypersurfaces irréductibles  $S_{F'_1} = \{\alpha_2 = 2\alpha_1\}$  et  $S_{F'_2} = \{\alpha_2 = -2\alpha_1\}$ . Sur  $S_{F'_1}$  nous avons une façon  $(1)[2, 3]$ , correspondant à la suite  $\{(k + \frac{\lambda}{k}, \frac{\mu}{k}, \frac{\nu}{k})\}$ . Sur  $S_{F'_2}$  nous avons une façon  $(1, 2)[3]$ , correspondant à la suite  $\{(-k + \frac{\lambda}{k}, 2k + \frac{\mu}{k}, \frac{\nu}{k})\}$ . Sur  $0\alpha_3 = S_{F'_1} \cap S_{F'_2}$  nous avons deux façons  $(1)[2, 3]$  et  $(1, 2)[3]$ , correspondant aux suites  $\{(\frac{\alpha_3 k}{2}, \frac{1}{k}, 0)\}$  et  $\{(-k + \frac{\alpha_3}{4k}, 2k, 0)\}$ .

La stratification obtenue de  $S_{F'}$  est donc donnée par :

$$S_{F'} \supset 0\alpha_3 \supset \emptyset.$$

**Remarque 4.2.27.** La définition de la partition de  $S_F$  définie par  $\Xi$  est, en fait, la “formalisation” de l'idée “*diviser l'ensemble  $S_F$  décrit par Jelonek en hypersurfaces irréductibles*”, ce qui est éclairé dans la partie suivante.

### 4.3 Relations entre la partition de l'ensemble $S_F$ par Jelonek et la stratification de $S_F$ par $\Xi$

**Remarque 4.3.1.** Le théorème 2.3.2 de Jelonek, page 34, donne une méthode pour déterminer l'ensemble  $S_F$  d'une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  comme suit : Soit  $\mathbb{C}(F_1, \dots, F_n) \subset \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$  une extension de corps. Pour chaque  $i$ , soit une équation irréductible de  $x_i$  sur  $\mathbb{C}[F_1, \dots, F_n]$

$$\sum_{k=0}^{n_i} \phi_k^i(F) x_i^{n_i-k} = 0,$$

où les  $\phi_k^i$  sont des polynômes. Alors, nous avons  $S_F = S$ .

L'idée de “*diviser l'ensemble  $S_F$  décrit par Jelonek en hypersurfaces irréductibles*” procède comme suit : Supposons que  $a$  soit un point d'une composante  $S_{n-1}$  de dimension  $n - 1$  de  $S_F$  définie par  $\Xi$  et que  $\{\xi_k^a\} = \{(x_{1,k}^a, \dots, x_{n,k}^a)\}$  soit une suite de  $\mathbb{C}_x^n$  tendant vers l'infini telle que  $F(\xi_k^a)$  tende vers le point  $a$ . D'après la remarque

4.2.9, page 76, pour  $m = 1, \dots, n$ , si  $F_m(\xi_k^a)$  ne tend pas vers 0, nous pouvons écrire  $F_m(x)$  comme une combinaison linéaire de produits d'éléments de la forme :

$$F_m^1(x)F_m^2(x)F_m^3(x) + F_m'(x), \quad (4.3.2)$$

où :

- i)  $F_m^r$  sont des polynômes irréductibles,
- ii)  $F_m'(\xi_k^a)$  tend vers un nombre complexe fixé,
- iii) si  $F_m^1(x) \neq 1$ , alors  $F_m^1(\xi_k^a)$  tend vers 0 avec le même degré que celui avec lequel  $F_m^2(\xi_k^a)$  tend vers l'infini de manière à ce que  $F_m^1(\xi_k^a)F_m^2(\xi_k^a)$  et  $F_m^3(\xi_k^a)$  tendent vers des nombres complexes quelconques.

D'après la définition 4.2.17, page 78, sur une composante  $S_{n-1}$  de  $S_F$  définie par  $\Xi$ , alors pour chaque  $m$ ,  $F_m(\xi_k^a)$  doit tendre ou bien vers un nombre complexe fixé pour tout point  $a \in S_{n-1}$ , ou bien vers un nombre complexe quelconque pour tout point  $a \in S_{n-1}$ . Cela veut dire que les points de  $\overline{S_{n-1}}$  doivent satisfaire une équation polynomiale irréductible fixée ( $\mathcal{E}$ ). L'adhérence  $\overline{S_{n-1}}$  de  $S_{n-1}$  est fermée dans  $S_F$  donc  $\dim \overline{S_{n-1}} = n - 1$  et  $\overline{S_{n-1}}$  est définie par l'équation ( $\mathcal{E}$ ). Cela signifie que nous avons “partitionné” l'hypersurface algébrique dont l'équation est  $\phi(F) = 0$  dans le théorème 2.3.2 de Jelonek [J1] en hypersurfaces algébriques *irréductibles* définies par les équations polynomiales de la forme ( $\mathcal{E}$ ), en cherchant les façons de  $S_F$  et les hypersurfaces algébriques irréductibles correspondantes.

Nous donnons maintenant une justification alternative de ce fait ainsi que des exemples, où l'ensemble  $S_F$  sera trouvé par le théorème de Jelonek et aussi par la méthode des “façons”, afin de justifier les relations entre ces deux méthodes.

**Exemple 4.3.3.** Soit  $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  l'application polynomiale dominante telle que

$$F_1 := x_1x_2, \quad F_2 := x_2x_3, \quad F_3 := x_3x_1.$$

Pour déterminer l'ensemble  $S_F$  par le théorème de Jelonek, il faut résoudre les équations suivantes

$$\sum_{k=0}^{n_i} \phi_k^i(F) x_i^{n_i-k} = 0, \forall i = 1, 2, 3.$$

Pour  $i = 1$ , nous avons  $(x_2x_3)x_1^2 - (x_1x_2)(x_3x_1) = 0$ , alors  $\phi_0^1(F) = F_2$ .

Pour  $i = 2$ , nous avons  $(x_1x_3)x_2^2 - (x_1x_2)(x_2x_3) = 0$ , alors  $\phi_0^2(F) = F_3$ .

Pour  $i = 3$ , nous avons  $(x_1x_2)x_3^2 - (x_2x_3)(x_3x_1) = 0$ , alors  $\phi_0^3(F) = F_1$ .

L'ensemble  $S_F$  est  $\cup_{i=1}^3 \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3 : \phi_0^i(F) = 0\}$  qui est l'union de trois plans de coordonnées  $\{\alpha_1 = 0\} \cup \{\alpha_2 = 0\} \cup \{\alpha_3 = 0\}$  dans  $\mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$ .

Avec notre méthode de “façons”, nous cherchons les façons possibles sur les hypersurfaces irréductibles de  $S_F$ . En fait, supposons que la suite  $(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})$  tende



vers l'infini mais que la suite  $(x_{1,k}x_{2,k}, x_{2,k}x_{3,k}, x_{3,k}x_{1,k})$  ne tende pas vers l'infini. Nous voyons que les rôles de  $x_{1,k}$ ,  $x_{2,k}$  et  $x_{3,k}$  sont les mêmes. Nous voyons aussi que les coordonnées  $x_{1,k}$ ,  $x_{2,k}$  et  $x_{3,k}$  peuvent tendre vers l'infini, vers 0, mais ne peuvent pas tendre vers un nombre différent de 0. En fait, si  $x_{1,k}$  tend vers  $\lambda \neq 0$ , alors  $x_{2,k}$  et  $x_{3,k}$  ne peuvent pas tendre vers l'infini, d'où la contradiction avec  $(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})$  tend vers l'infini. Supposons que deux coordonnées tendent vers l'infini, par exemple  $x_{1,k}$  et  $x_{2,k}$  tendent vers l'infini, alors  $x_{1,k}x_{2,k}$  tend vers l'infini, d'où la contradiction avec  $(x_{1,k}x_{2,k}, x_{2,k}x_{3,k}, x_{3,k}x_{1,k})$  ne tend pas vers l'infini. Donc il n'y a qu'une coordonnée tendant vers l'infini. Nous avons les trois cas possibles suivants :

1) ou bien  $x_{1,k}$  tend vers l'infini et  $x_{2,k}, x_{3,k}$  tendent vers 0 telles que  $x_{1,k}x_{2,k}$  et  $x_{1,k}, x_{3,k}$  tendent vers  $\lambda, \nu$  dans  $\mathbb{C}$ . Nous obtenons une hypersurface irréductible  $S_{F_1} = \{\alpha_2 = 0\}$  de dimension 2 de  $S_F$ . La façon de  $S_{F_1}$  est (1)[2, 3].

2) ou bien  $x_{2,k}$  tend vers l'infini et  $x_{1,k}, x_{3,k}$  tendent vers 0 telles que  $x_{1,k}x_{2,k}$  et  $x_{2,k}, x_{3,k}$  tendent vers  $\lambda, \mu$  dans  $\mathbb{C}$ . Nous obtenons une hypersurface irréductible  $S_{F_2} = \{\alpha_3 = 0\}$  de dimension 2 de  $S_F$ . La façon de  $S_{F_2}$  est (2)[1, 3].

3) ou bien  $x_{3,k}$  tend vers l'infini et  $x_{1,k}, x_{2,k}$  tendent vers 0 telles que  $x_{2,k}x_{3,k}$  et  $x_{3,k}, x_{1,k}$  tendent vers  $\mu, \nu$  dans  $\mathbb{C}$ . Nous obtenons une hypersurface irréductible  $S_{F_3} = \{\alpha_1 = 0\}$  de dimension 2 de  $S_F$ . La façon de  $S_{F_3}$  est (3)[1, 2].

**Exemple 4.3.4.** Soit  $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  l'application polynomiale dominante telle que

$$F_1 := x_1, \quad F_2 := x_2, \quad F_3 := x_1x_2x_3.$$

Pour déterminer l'ensemble  $S_F$  par le théorème de Jelonek, il faut résoudre les équations suivantes

$$\sum_{k=0}^{n_i} \phi_k^i(F) x_i^{n_i-k} = 0, \forall i = 1, 2, 3.$$

Avec  $i = 1$ , nous avons  $x_1 - F_1 = 0$ , alors  $\phi_0^1(F) = 1$ , la contribution de la première coordonnée à  $S_F$  est donc vide.

Avec  $i = 2$ , nous avons  $x_2 - F_2 = 0$ , alors  $\phi_0^2(F) = 1$ , la contribution de la deuxième coordonnée à  $S_F$  est donc vide.

Avec  $i = 3$ , nous avons  $F_1F_2x_3 - F_3 = 0$ , alors  $\phi_0^3(F) = F_1F_2$ .

L'ensemble  $S_F$  est  $\cup_{i=1}^3 \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3 : \phi_0^i(F) = 0\}$  qui est l'union de deux plans de coordonnées  $\{\alpha_1 = 0\} \cup \{\alpha_2 = 0\}$  dans  $\mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$ .

Avec notre méthode des "façons", nous cherchons les façons possibles sur les hypersurfaces irréductibles de  $S_F$ . Supposons que la suite  $\{\xi_k\} = \{(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})\}$  tende vers l'infini mais que la suite  $\{F(\xi_k)\} = \{(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{1,k}x_{2,k}x_{3,k})\}$  ne tende pas vers l'infini. Nous voyons que  $x_{1,k}$  et  $x_{2,k}$  ne peuvent pas tendre vers l'infini. Donc  $x_{3,k}$  tend vers l'infini. Nous avons deux cas possibles suivants :

1) ou bien  $x_{3,k}$  tend vers l'infini et  $x_{1,k}$  tend vers 0 telles que  $x_{1,k}x_{3,k}$  tend vers  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}$ . Supposons que  $x_{2,k}$  tende vers  $\mu$  dans  $\mathbb{C}$ . Nous obtenons une hypersurface irréductible  $S_{F_1} = \{\alpha_1 = 0\}$  de dimension 2 de  $S_F$ . La façon de  $S_{F_1}$  est (3)[1].

2) ou bien  $x_{3,k}$  tend vers l'infini et  $x_{2,k}$  tend vers 0 telles que  $x_{2,k}x_{3,k}$  tend vers  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}$ . Supposons que  $x_{1,k}$  tende vers  $\mu$  dans  $\mathbb{C}$ . Nous obtenons une hypersurface irréductible  $S_{F_1} = \{\alpha_2 = 0\}$  de dimension 2 de  $S_F$ . La façon de  $S_{F_2}$  est (3)[2].

Des deux exemples ci-dessus, nous déduisons les remarques suivantes :

**Remarque 4.3.5.** Dans le théorème 2.3.2 de Jelonek, les équations  $\phi_0^i(a) = 0$  ne sont peut-être pas irréductibles. Mais avec la méthode de détermination de  $S_F$  par les façons, nous pouvons toujours “subdiviser”  $S_F$  en hypersurfaces irréductibles dont l'équation est  $\phi^i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ . De plus, chaque hypersurface irréductible admet un ensemble de façons différent de l'ensemble des façons des autres hypersurfaces irréductibles de  $S_F$ .

**Remarque 4.3.6.** Avec la méthode de détermination de l'ensemble  $S_F$  par les façons, nous voyons aussi que si  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  est une application polynomiale dominante alors l'ensemble  $S_F$  contient au maximum  $n$  hypersurfaces irréductibles. En fait, si  $S_F$  contient  $n + 1$  hypersurfaces irréductibles d'équations  $\phi^i(F_1, \dots, F_n) = 0$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , alors les polynômes  $F_1, \dots, F_n$  sont dépendants, d'où la contradiction avec  $F$  dominante, par le lemme 1.2.12, page 29. Par ailleurs, dans le cas  $n = 2$ , l'ensemble  $S_F$  est irréductible.

L'exemple suivant nous montre que, dans quelques cas, une hypersurface irréductible qui n'est pas lisse dans le théorème 2.3.2 de Jelonek, sera stratifiée en strates lisses définies par  $\Xi$ .

**Exemple 4.3.7.** Soit l'application polynomiale  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3, x_4)}^4 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)}^4$  définie par

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2 + x_1x_3, x_2x_3, x_3x_4 + x_3, x_4x_1 + x_1).$$

L'ensemble  $S_F$  est le cône  $\mathcal{C}$  dont l'équation est  $\alpha_1\alpha_3 = \alpha_2\alpha_4$  avec la façon (2, 4)[1, 3].

Montrons maintenant que cette application est dominante. Prenons un point  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  dans  $\mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)}^4$  telle que  $\alpha_1\alpha_3 \neq \alpha_2\alpha_4$ . Considérons le système d'équations suivant :

$$x_1x_2 + x_1x_3 = \alpha_1, \quad x_2x_3 = \alpha_2, \quad x_3x_4 + x_3 = \alpha_3, \quad x_4x_1 + x_1 = \alpha_4. \quad (4.3.8)$$

Puisque  $\alpha_1\alpha_3 \neq \alpha_2\alpha_4$ , nous avons

$$x_1x_3(x_2 + x_3)(x_4 + 1) \neq x_1x_2x_3(x_4 + 1) \quad (4.3.9)$$

et  $x_1, x_3$  et  $x_4 + 1$  ne sont pas nuls. Le système d'équations (4.3.8) devient :

$$x_2 + x_3 = \frac{\alpha_1}{x_1}, \quad x_2 = \frac{\alpha_2}{x_3}, \quad x_3 = \frac{\alpha_3}{x_4 + 1}, \quad x_1 = \frac{\alpha_4}{x_4 + 1}.$$

Remplaçons  $x_1, x_2, x_3$  dans l'équation  $x_2 + x_3 = \frac{\alpha_1}{x_1}$ , nous obtenons :

$$\frac{\alpha_2(x_4 + 1)}{\alpha_3} + \frac{\alpha_3}{x_4 + 1} = \frac{\alpha_1(x_4 + 1)}{\alpha_4}.$$

Puisque  $\alpha_1\alpha_3 \neq \alpha_2\alpha_4$  alors  $\alpha_3$  et  $\alpha_4$  ne sont pas nuls, donc nous avons

$$(\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4)(x_4 + 1)^2 = \alpha_3^2\alpha_4. \quad (4.3.10)$$

Nous avons  $\alpha_2\alpha_4 - \alpha_1\alpha_3 \neq 0$ . Donc l'équation (4.3.10) admet toujours des solutions. Le système d'équation (4.3.8) admet donc toujours des solutions. L'application  $F$  est dominante.

Avec le théorème de Jelonek, nous savons seulement que  $S_F$  est le cône complexe  $\mathcal{C}$  de dimension 3 dans  $\mathbb{C}^4$ . Ce cône n'est pas stratifié.

De même que dans l'exemple 4.3.7, une stratification de  $S_F$  définie par  $\Xi$  admet l'origine  $\{0\}$  comme strate de dimension 0. Cette stratification est une stratification de Whitney.

## 4.4 Partition de $S_F$ définie par $\Xi^*$

### 4.4.1 Pourquoi définir la partition de $S_F$ définie par $\Xi^*$ ?

Une question naturelle est de savoir si, en général, la partition de  $S_F$  définie par  $\Xi$  d'une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  est une bonne stratification ? En fait, la partition de  $S_F$  définie par  $\Xi$  est une bonne stratification pour les exemples donnés dans cette thèse pour les applications polynomiales dominantes  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  et dans quelques cas particuliers, par exemple, le cas où la dimension  $n = 3$  et le degré de  $F$  est  $d = 2$ , ce qui sera l'objet de la promenade du chapitre 6. Par contre, cela n'est pas vrai en général, comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 4.4.1.** Soit  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2)}^2 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2$  une application polynomiale dominante telle que  $F(x_1, x_2) = ((x_1x_2)^2, (x_1x_2)^3 + x_1)$ . Il n'y a qu'une seule façon  $\kappa = (2)[1]$  correspondant à la suite  $\{\xi_k\} = \{(\frac{1}{k}, k\alpha)\}$  si  $\alpha \neq 0$  et  $\{\xi_k\} = \{(\frac{1}{k^2}, k\alpha)\}$  si  $\alpha = 0$ . Nous voyons que  $F(\xi_k)$  tend vers  $(\alpha^2, \alpha^3)$  et  $S_F$  est une courbe ayant un point singulier à l'origine.

La question est donc de savoir pourquoi la stratification de  $S_F$  ne marche pas dans l'exemple 4.4.1 ? Nous devons comprendre la différence entre "la façon [2](1)

à l'origine 0" et "la façon [2](1) au point  $a \in S_F \setminus \{0\}$ " ? Rappelons d'abord que, la propriété de "propreté" peut se caractériser de manière suivante : L'application polynomiale  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  n'est pas propre en  $a \in \mathbb{C}^n$  si et seulement s'il existe une courbe  $\gamma : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}^n$  tendant vers l'infini et telle que  $F \circ \gamma$  tend vers  $a$ . Dans l'exemple 4.4.1, nous voyons qu'en fait, pour un point  $a = (\alpha^2, \alpha^3)$  dans  $S_F \setminus \{0\}$ , nous devons choisir une courbe du type  $\mathcal{C}_u = (\frac{1}{u^r}, \alpha u^s)$ , où  $u \in ]0, +\infty[$  et  $r$  doit être égal à  $s$ . Mais à l'origine 0, nous devons choisir une courbe du type  $\mathcal{C}'_u = (\frac{1}{u^r}, \alpha u^s)$  où  $r > s$ . Le degré avec lequel la première coordonnée tend vers 0 est plus grand que le degré avec lequel la deuxième coordonnée tend vers l'infini. Nous allons noter (2)[1\*] la façon correspondant à cette courbe. Nous voyons que la courbe  $F(\mathcal{C}'_u)$  admet une "forme" différente des courbes  $F(\mathcal{C}_u)$  (voir dessin 4.21).

Dans le dessin suivant, nous voyons qu'avec les points  $a_1, a_2, a_3, \dots$  de  $S_F \setminus \{0\}$ , nous avons les courbes "parallèles"  $\mathcal{C}_u^1, \mathcal{C}_u^2, \mathcal{C}_u^3, \dots$  dans l'espace  $0x_1x_2$ . Ces courbes nous fournissent les images "parallèles" dans l'espace  $0\alpha_1\alpha_2$ . La courbe  $\mathcal{C}_u$  correspondante à l'origine 0 n'est pas parallèle aux courbes  $\mathcal{C}_u^i, i = 1, 2, 3, \dots$ , donc son image tend vers 0 avec un "autre type" que celui des courbes  $F(\mathcal{C}_u^i)$  (voir la figure 4.21).

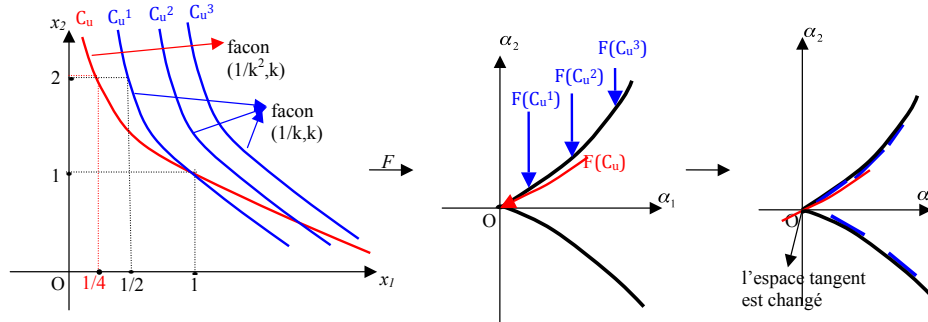


FIGURE 4.21 – Les courbes correspondantes aux "façons étoiles"

Cela est la raison pour laquelle l'espace tangent de  $F(\mathcal{C}_{(x_1, x_2)}^2)$  change au point 0 et nous fournit un point singulier. Pour résoudre ce problème, nous allons donner la définition 4.4.2 de "la partition de  $S_F$  définie par  $\Xi^*$ ". Mais d'abord, pour éclairer cette définition, nous observons les "feuilletages" créés par les courbes tendant vers l'infini et telles que leurs images tendent vers les points de  $S_F$ .

### 4.4.2 Feuilletages de l'ensemble de Jelonek et de l'ensemble des Valette

Revenons à l'exemple 3.3.2, page 49 de l'application polynomiale dominante

$$F : \mathbb{R}_{(x_1, x_2)}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2 \quad F(x_1, x_2) = (x_1, x_1^2 x_2^2 + 2x_1^2 x_2).$$

Rappelons que l'ensemble  $S_F$  est le demi-axe  $\{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2 : \alpha_1 = 0, \alpha_2 \geq 0\}$ , avec les suites correspondantes  $\xi_k = (x_{1,k}, x_{2,k})$  telles que  $x_{1,k}$  tend vers 0 et  $x_{2,k}$  tend vers l'infini. D'une part, nous voyons que, de nouveau, l'origine 0 est la partie singulière de  $S_F$  et la suite correspondante est telle que la première coordonnée tend vers 0 avec un degré plus grand que celui avec lequel la deuxième coordonnée tend vers l'infini, ce qui sera noté “façon” (2)[1\*] dans la définition 4.4.2. Par contre, la suite correspondante au point  $a \in S_F \setminus \{0\}$  est telle que la première coordonnée tend vers 0 avec le même degré que celui avec lequel la deuxième coordonnée tend vers l'infini, ce qui sera noté “façon” (2)[1] dans la définition 4.4.2. D'autre part, pour un point  $a = (0, \alpha_2) \in S_F \setminus \{0\}$ , il existe *quatre* courbes tendant vers l'infini dans l'espace source  $0x_1x_2$  :

$$\mathcal{C}_1 = \left(\frac{1}{u}, u\right), \quad \mathcal{C}_2 = \left(\frac{1}{u}, -u\right), \quad \mathcal{C}_3 = \left(\frac{-1}{u}, u\right), \quad \mathcal{C}_4 = \left(\frac{-1}{u}, -u\right),$$

telles que :

- + les *quatre* courbes  $F(\mathcal{C}_i)$  tendent vers  $a \in S_F$  dans l'espace du but  $0\alpha_1\alpha_2$ ,
- + les *quatre* courbes  $h_F(\mathcal{C}_i)$  tendent vers  $a \in S_F \times 0_{\mathbb{R}^4} \subset V_F$  dans l'espace  $0\alpha_1\alpha_2 \times \mathbb{R}^4$ , où  $h_F = (F, \psi_1, \dots, \psi_4)$ .

Nous avons donc des “feuilletages” de l'espace  $0x_1x_2$ , de l'ensemble de Jelonek  $S_F$  et de l'ensemble des Valette  $V_F$  comme indiqué sur le dessin 4.22.

Puisque l'origine  $0_{\mathbb{R}^2}$  dans l'espace  $0\alpha_1\alpha_2$  est la partie singulière de  $S_F$ , l'origine  $0_{\mathbb{R}^6}$  est une partie singulière de  $V_F$  dans l'espace  $0\alpha_1\alpha_2 \times \mathbb{R}^4$ . De plus en plus près de l'origine, les courbes correspondantes vont changer de “forme”, c'est-à-dire elles vont “pencher” le long des courbes correspondantes à l'origine. C'est la raison pour laquelle quand nous adoptons la définition la façon *définie par*  $\Xi^*$ , nous allons obtenir une partie singulière de  $S_F$  (en fait, ici, c'est  $S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ ) : l'ensemble des Valette  $V_F$  va “pencher” le long des courbes correspondant à ces façons. Ainsi la partition de  $S_F$  définie par  $\Xi^*$  nous fournit une bonne stratification de  $S_F$ . L'idée de définir cette partition est de “distinguer” entre les courbes tendant vers l'infini en utilisant le “degré”, c'est-à-dire, décrire la “vitesse” avec laquelle un point de l'ensemble de  $V_F$  tend vers la partie singulière de  $S_F \times \{0_{\mathbb{R}^p}\} \subset V_F$ .

### 4.4.3 Partition de $S_F$ définie par $\Xi^*$

**Définition 4.4.2.** Soit  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application polynomiale dominante telle que  $S_F \neq \emptyset$ . Définissons :

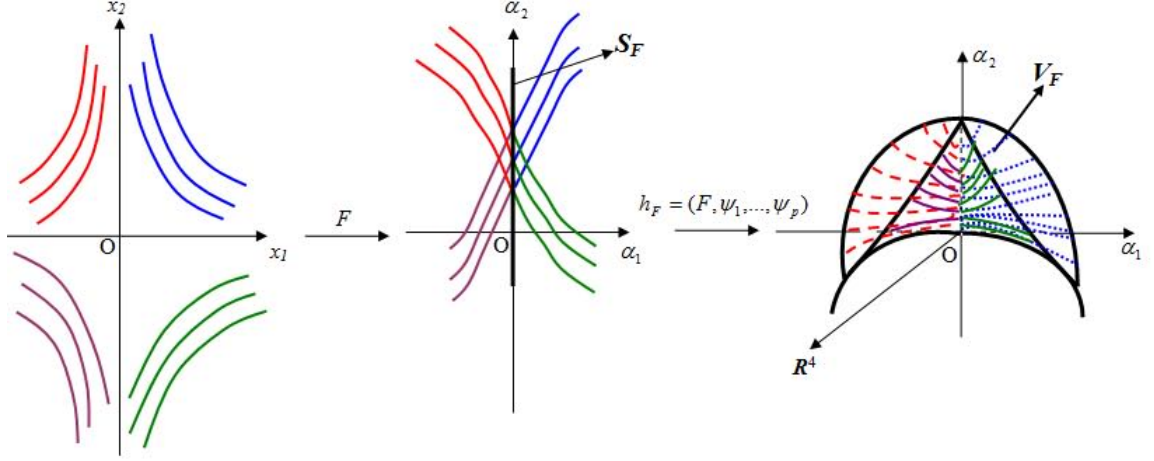


FIGURE 4.22 – Les feuilletages de  $0x_1x_2$ , de  $S_F$  et de  $V_F$

1) “Une “façon étoile”  $\kappa^*(\xi_k^a)$  du point  $a$  dans  $S_F$ ” par l’induction comme suit :

i) Soit  $S_{n-1}$  une composante de dimension  $n - 1$  de la partition de  $S_F$  définie par  $\Xi$ . Pour tout  $a \in S_{n-1}$ , il existe une suite  $\{\xi_k^a\} = \{(x_{1,k}^a, \dots, x_{n,k}^a)\}$  tendant vers l’infini telle que  $F(\xi_k^a)$  tende vers  $a$ . Nous “subdivisons”  $S_{n-1}$  en deux parties  $\mathcal{S}$  et  $S_{n-1} \setminus \mathcal{S}$ , où  $\mathcal{S} \subset S_{n-1}$  telles que :

a) les degrés des suites coordonnées de la suite correspondant au point  $a$  sont stables, c’est-à-dire ne changent pas quand  $a$  décrit  $S_{n-1} \setminus \mathcal{S}$ ,

b) les degrés des suites coordonnées de la suite correspondant au point  $a$  changent quand  $a$  passe de  $S_{n-1} \setminus \mathcal{S}$  à  $\mathcal{S}$ . Alors :

$$\begin{cases} \kappa^*(\xi_k^a) := \kappa(\xi_k^a) \text{ si } a \in S_{n-1} \setminus \mathcal{S}, \\ \kappa^*(\xi_k^a) = (i_1, \dots, i_\Theta^*, \dots, i_p)[j_1, \dots, j_\Omega^*, \dots, j_q] \text{ sinon,} \end{cases}$$

où

a)  $\kappa(\xi_k^a) = (i_1, \dots, i_\Theta, \dots, i_p)[j_1, \dots, j_\Omega, \dots, j_q]$ ,

b) les degrés des suites coordonnées  $x_{i_\Theta}^*$  tendant vers l’infini et  $x_{j_\Omega}^*$  tendant vers un nombre complexe changent avec les suites  $x_{i_\Theta}$  et  $x_{j_\Omega}$  quand  $a$  décrit  $S_{n-1} \setminus \mathcal{S}$ , tels que  $F_i(\xi_k^a)$  change son degré, pour certains polynômes coordonnées  $F_i$  de  $F$ . Notons que  $\Theta$  et  $\Omega$  sont des ensembles d’indices dans  $\{1, \dots, n\}$ .

ii) Soit  $S_\nu$  une composante de dimension  $\nu < n - 1$  de  $S_F$  de la partition définie par  $\Xi$ . Nous “subdivisons”  $S_\nu$  en deux parties  $\mathcal{S}$  et  $S_\nu \setminus \mathcal{S}$  comme dans le cas i). Alors :

$$\begin{cases} \kappa^*(\xi_k^a) := \kappa^*(\xi_k^a) \text{ si } a \in S_\nu \setminus \mathcal{S}, \\ \kappa^*(\xi_k^a) = (i_1, \dots, i_\Theta^*, \dots, i_p)[j_1, \dots, j_\Omega^*, \dots, j_q] \text{ sinon,} \end{cases}$$

où certains indices sont déjà des indices étoilés, les indices des suites coordonnées changeant de degré sont de nouveau munis d'étoiles.

$$2) \Xi^*(a) := \{\kappa^*(\xi_k^a) : \xi_k^a \rightarrow \infty, F(\xi_k^a) \rightarrow a\}.$$

$$3) or^*(a) := \sharp(\Xi^*(a)).$$

4) Deux points  $a_1, a_2$  d'une composante de la partition de  $S_F$  définie par  $\Xi^*$  sont dans la même strate<sup>2</sup> si et seulement si  $\Xi^*(a_1) = \Xi^*(a_2)$ . Cette définition détermine une partition de  $S_F$ , appelée *partition définie par  $\Xi^*$* .

**Remarque 4.4.3.** Par la définition 4.4.2, nous voyons que les façons étoiles des strates de dimension la plus grande n'ont pas d'étoile. Par contre, les strates de dimension la plus petite sont celles qui admettent le plus d'étoiles.

**Remarque 4.4.4.**  $or(a) = or^*(a)$ , pour tout  $a \in S_F$ .

**Remarque 4.4.5.** La partition de  $S_F$  définie par  $\Xi^*$  est plus fine que la partition de  $S_F$  définie par  $\Xi$ . Les exemples suivants vont éclairer ce fait et ainsi la définition 4.4.2.

**Exemple 4.4.6.** Revenons à l'exemple 4.2.20, page 79 de l'application polynomiale dominante

$$F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3 \quad F = (x_1^2 - 1, x_2 + 2, (x_1^2 - 1)(x_2 + 2)x_3).$$

Rappelons que la partition de  $S_F$  définie par  $\Xi$  est la stratification donnée par la filtration :

$$S_F \supset 0\alpha_3 \supset \emptyset,$$

où :

+  $\Xi(a) = \{(3)[1]\}$  pour les points  $a$  de  $S_2^1 = (0\alpha_2\alpha_3) \setminus 0\alpha_3$  avec la suite correspondante  $(1 + \frac{1}{k}, \alpha_2 - 2, \frac{\alpha_3}{2\alpha_2})$ .

+  $\Xi(a) = \{(3)[2]\}$  pour les points  $a$  de  $S_2^2 = (0\alpha_1\alpha_3) \setminus 0\alpha_3$  avec la suite correspondante  $(\sqrt{1 + \alpha_1}, \frac{1}{k} - 2, \frac{k\alpha_3}{2})$ .

+  $\Xi(a) = \{(3)[1, 2]\}$  pour les points  $a$  de  $S_1 = 0\alpha_3$  avec la suite correspondante  $(1 + \frac{1}{k}, \frac{1}{k} - 2, \frac{\alpha_3 k^2}{2})$ .

Déterminons la partition de  $S_F$  définie par  $\Xi^*$  :

+  $\Xi^*(a) = \{(3)[1]\}$  pour les points  $a$  de  $S_2^1$ .

+  $\Xi^*(a) = \{(3)[2]\}$  pour les points  $a$  de  $S_2^2$ .

+  $\Xi^*(a) = \{(3^*)[1^*, 2^*]\}$  pour les points  $a$  de  $S_1$ , puisque la suite correspondante est  $(1 + \frac{1}{k}, \frac{1}{k} - 2, \frac{\alpha_3 k^2}{2})$  : le degré de la troisième coordonnée change avec les points  $a \in S_2^1 \cup S_2^2$  ; le degré de la première coordonnée change avec les points  $a \in S_2^2$  (notons qu'ici, nous disons qu'une suite tendant vers un nombre complexe fixe (indépendant

---

2. nous anticipons ici le résultat du théorème 4.4.8

de  $a$ ) admet un degré plus petit qu'une suite tendant vers un nombre complexe variable) ; le degré de la deuxième coordonnée change avec les points  $a \in S_2^1$ .

+ Avec l'origine  $0 = (0, 0, 0)$ , nous avons la suite correspondante  $(1, -2, k)$  donc la façon étoile de ce point est  $(3^{**})[1^{**}, 2^{**}]$ .

La stratification de  $S_F$  définie par  $\Xi^*$  est donnée par la filtration :

$$S_F \supset 0\alpha_3 \supset \{0\} \supset \emptyset,$$

qui est plus fine que la stratification de  $S_F$  définie par  $\Xi$  (voir figure 4.23).

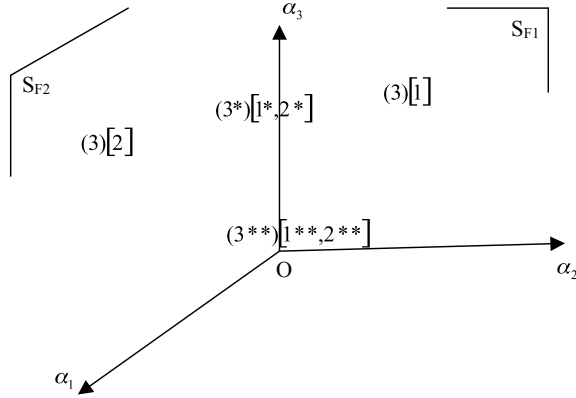


FIGURE 4.23 – La stratification de  $S_F$ , définie par  $\Xi^*$ , pour l'application polynomiale dominante  $F = (x_1^2 - 1, x_2 + 2, (x_1^2 - 1)(x_2 + 2)x_3)$

**Exemple 4.4.7.** Revenons à l'exemple 4.2.22, page 80 de l'application dominante

$$F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3 \quad F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2, x_2 x_3, x_1 x_2 x_3).$$

Rappelons que la stratification de  $S_F$  définie par  $\Xi$  est donnée par la filtration :

$$S_F = S_2^1 \cup S_2^2 \cup S_2^3 \supset S_1^1 \cup S_1^2 \cup S_1^3 \supset S_0 = \{0\} \supset \emptyset,$$

où

$$\begin{aligned} S_2^1 &= (0\alpha_1\alpha_3), & S_2^2 &= (0\alpha_2\alpha_3), & S_2^3 &= (0\alpha_1\alpha_2), \\ S_1^1 &= 0\alpha_1, & S_1^2 &= 0\alpha_2, & S_1^3 &= 0\alpha_3 \end{aligned}$$

et  $S_0$  est l'origine.

En cherchant les façons étoiles de  $S_F$ , nous obtenons que la stratification de  $S_F$  définie par  $\Xi^*$  est la stratification de  $S_F$  définie par  $\Xi$  comme le montre la figure 4.24.



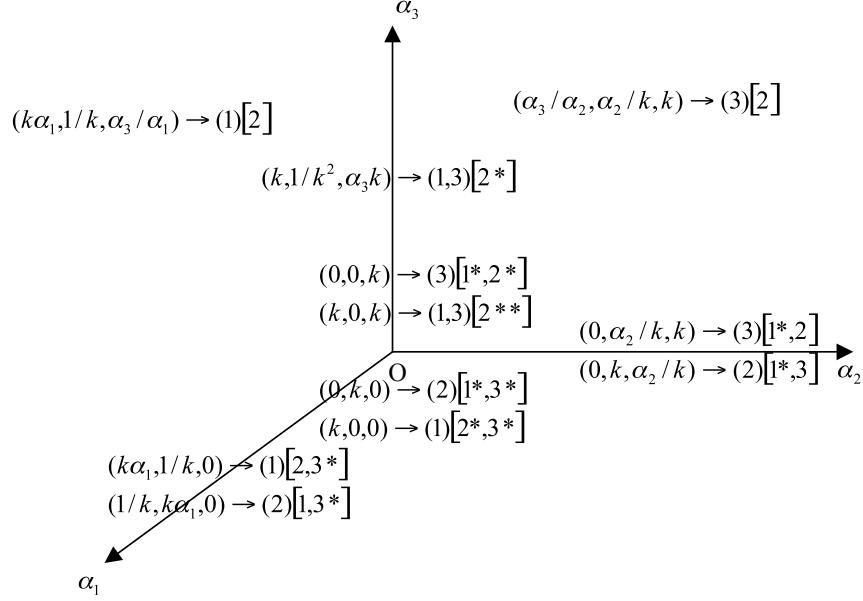


FIGURE 4.24 – La stratification de  $S_F$ , définie par  $\Xi^*$ , pour l'application  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, x_2x_3, x_1x_2x_3)$ .

#### 4.4.4 La partition de $S_F$ définie par $\Xi^*$ est une bonne stratification

La question naturelle se pose de savoir *si la partition de  $S_F$ , définie par  $\Xi^*$ , d'une application polynomiale polynomiale dominante est une bonne stratification?* La réponse est oui, comme le montre le théorème suivant :

**Théorème 4.4.8.** *Soit  $F = (F_1(x), \dots, F_n(x)) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application polynomiale dominante telle que  $S_F$  ne soit pas vide. Alors, la partition de l'ensemble  $S_F$  en classes d'équivalence définie par les façons étoiles est une stratification satisfaisant la condition de frontière.*

*Démonstration.* Supposons que  $(\mathcal{S})$  soit la partition de  $S_F$  définie par  $\Xi^*$  et  $(\mathcal{S}')$  soit la partition de  $S_F$  définie par  $\Xi$ . Observons d'abord que :

+ D'après la remarque 4.3.1, chaque adhérence d'une composante de  $(\mathcal{S}')$  admet un système (fixé) d'équations. Par ailleurs, deux adhérences de deux composantes différentes de  $(\mathcal{S}')$  admettent deux systèmes d'équations différents.

+ D'après la définition 4.4.2, si  $S$  est une composante de  $(\mathcal{S})$  et  $S'$  est une composante de  $(\mathcal{S}')$  telle que  $S \subset S'$  et  $\dim S = \dim S'$ , alors  $\overline{S} = \overline{S'}$ .

Considérons maintenant  $S_\nu$  une composante de  $(\mathcal{S})$  et prouvons que  $S_\nu$  est lisse.

Prenons un point  $b \in S_\nu$  et supposons que  $b$  soit un point singulier. Il y a deux cas possibles :

1) Ou bien  $b$  est dans une composante  $S_\eta$  de  $(\mathcal{S})$ , de dimension  $\eta$  plus petite que  $\nu$ , telle que  $S_\eta = \overline{S_\nu} \cap \overline{S'_\nu}$ , où  $S'_\nu$  est autre composante de dimension  $\nu$  de  $(\mathcal{S})$ . Le système d'équations de  $\overline{S_\eta}$  est donc différent du système d'équations de  $\overline{S_\nu}$ . L'ensemble des façons de  $b$  est donc différent de l'ensemble des façons de  $S_\nu$ , d'où la contradiction avec la définition 4.4.2, pour le fait que  $b$  est un point de  $S_\nu$ .

2) Ou bien il n'existe pas de telle composante  $S'_\nu$  de  $(\mathcal{S})$  que  $\overline{S_\nu} \cap \overline{S'_\nu}$  contienne  $b$ . Puisque  $b$  est un point singulier de  $S_\nu$ , alors  $b \times 0_{\mathbb{R}^p}$  est un point singulier de l'ensemble des Valette  $V_F$ . Les courbes dans  $V_F$ , correspondant aux points réguliers de  $S_\nu \times 0_{\mathbb{R}^p}$  doivent changer leurs “formes” quand ces points arrivent près de  $b \times 0_{\mathbb{R}^p}$ . C'est-à-dire, la courbe (dans  $V_F$ ) correspondant au point  $b \times 0_{\mathbb{R}^p}$  n'admet pas la même “forme” que les courbes correspondant aux points réguliers de  $S_\nu \times 0_{\mathbb{R}^p}$ . Cela signifie que certaines de suites coordonnées correspondant au point  $b$  changent de degré. Il existe donc au moins une façon étoile du point  $b$  qui n'est pas contenue dans l'ensemble des façons de  $S_\nu$ , d'où la contradiction avec la définition 4.4.2, pour le fait que  $b$  est un point de  $S_\nu$ .

Prouvons maintenant que cette stratification satisfait la condition de frontière. Supposons que  $\overline{S_\nu} \setminus S_\nu \neq \emptyset$ . Puisque  $S_F$  est fermé, nous avons  $\overline{S_\nu} \setminus S_\nu \subset S_F$ . Prenons un point  $c$  dans  $\overline{S_\nu} \setminus S_\nu$ . Comme  $c$  n'est pas un point de la strate  $S_\nu$ , ce point est contenu dans une autre strate  $S_\eta$  de  $(\mathcal{S})$ . Il y a deux cas possibles :

1) Ou bien  $\overline{S_\eta} = \overline{S_\nu} \cap \overline{S'_\nu}$ , où  $S'_\nu$  est autre strate de dimension  $\nu$  de  $(\mathcal{S})$  :  $\overline{S_\eta}$  est une variété algébrique admettant un système d'équations composé du système d'équations de  $\overline{S_\nu}$  et du système d'équations de  $\overline{S'_\nu}$ . Puisque la composante  $S'_\nu$  est différente de la composante  $S_\nu$  dans  $(\mathcal{S})$ , le système d'équations de  $\overline{S'_\nu}$  est différent du système d'équations de  $\overline{S_\nu}$ . Alors le nombre d'équations dans le système d'équations de  $\overline{S_\eta}$  est plus grand que le nombre d'équations dans le système d'équations de  $\overline{S_\nu}$ . Donc  $\overline{S_\eta}$  est une variété algébrique de dimension plus petite que la dimension de  $\overline{S_\nu}$ . Alors  $S_\eta$  est une strate de dimension plus petite que la dimension de  $S_\nu$  dans  $(\mathcal{S})$ .

2) Ou bien  $S_\eta \subsetneq \overline{S_\nu}$  et il n'existe pas de telle composante  $S'_\nu$  de  $(\mathcal{S})$  que  $\overline{S_\eta} = \overline{S_\nu} \cap \overline{S'_\nu}$  : puisque  $\overline{S_\eta}$  et  $\overline{S_\nu}$  sont des variétés algébriques, la dimension de  $\overline{S_\eta}$  doit être plus petite que la dimension de  $\overline{S_\nu}$ . La dimension de  $S_\eta$  est donc plus petite que la dimension de  $S_\nu$ .

□

**Définition 4.4.9.** *La stratification de  $S_F$  définie par les façons étoiles est appelée la stratification définie par les façons.*

Donnons ici un exemple pour éclairer le théorème 4.4.8 ci-dessus et aussi pour mieux comprendre l'ensemble des Valette  $V_F$ . En fait les courbes correspondantes avec les “façons étoiles” jouent un rôle très important pour bien comprendre “la forme” de l'ensemble  $V_F$  d'une application polynomiale  $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ , où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Ici, pour pouvoir dessiner l'ensemble des Valette  $V_F$ , nous donnons l'exemple suivant dans le cas réel  $\mathbb{R}^2$ , mais par contre, il est choisi pour que l'ensemble  $S_F$  soit une hypersurface.

**Exemple 4.4.10.** Soit l'application polynomiale  $F : \mathbb{R}_{(x_1, x_2)}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2$  définie par

$$F(x_1, x_2) = ((x_1 x_2)^2, (x_1 x_2)^3 + x_1).$$

L'ensemble  $S_F$  est le “cusp”  $\{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2 : \alpha_1^3 = \alpha_2^2\}$  (voir figure 4.25). Pour  $a \in S_F \setminus \{0\}$ , nous avons  $\Xi^*(a) = \{(2)[1]\}$  avec la suite correspondante  $(\frac{1}{k}, k)$ . Pour l'origine 0, nous avons la suite correspondante  $(\frac{1}{k^2}, k)$ ,  $\Xi^*(0) = \{(2)[1^*]\}$ . Une stratification de  $S_F$  est donc donnée par la filtration suivante :

$$S_F \supset \{0\} \supset \emptyset.$$

L'ensemble  $Sing F$  est composé des droites  $x_1 = 0$  et  $x_2 = 0$ , puisque

$$|J_F(x_1, x_2)| = -2x_1^2 x_2.$$

$Sing F$  divise donc l'espace source  $0x_1 x_2$  en quatre parties :

$$U_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{(x_1, x_2)}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\},$$

$$U_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{(x_1, x_2)}^2 : x_1 < 0, x_2 > 0\},$$

$$U_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{(x_1, x_2)}^2 : x_1 > 0, x_2 < 0\},$$

$$U_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{(x_1, x_2)}^2 : x_1 < 0, x_2 < 0\},$$

comme dans la figure 4.26.

Nous savons maintenant que l'ensemble des Valette admet donc quatre “nappes”. Nous avons

$$F(x_1 = 0) = \{(0, 0)\}, \quad F(x_2 = 0) = \{(0, x_1)\}.$$

L'ensemble  $K_0(F)$  est donc l'axe  $0\alpha_2$  dans l'espace  $(0\alpha_1\alpha_2)$ .

*Comment sont situées les quatre nappes de  $V_F$  ?* Par un calcul rapide, nous obtenons

$$F(U_1) = F(U_2) = \{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2 : \alpha_1 > 0, \alpha_2^2 > \alpha_1^3\},$$

$$F(U_3) = F(U_4) = \{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2 : \alpha_1 > 0, \alpha_2^2 < \alpha_1^3\}$$

(voir figure 4.27).

Dans l'espace  $(0\alpha_1\alpha_2) \times \mathbb{R}^4$ ,  $F(U_1)$  et  $F(U_2)$ , d'une part, sortent du plan  $(0\alpha_1\alpha_2)$ , d'autre part, sont “séparés” en  $h_F(U_1)$  et  $h_F(U_2)$ , comme dans la figure 4.28 . De la

même manière,  $F(U_3)$  et  $F(U_4)$  sortent du plan  $(0\alpha_1\alpha_2)$  et sont séparés en  $h_F(U_3)$  et  $h_F(U_4)$  dans l'espace  $0\alpha_1\alpha_2 \times \mathbb{R}^4$ , comme dans la figure 4.29.

Comment sont collées les quatre nappes de  $V_F$  ? Nous voyons que, pour un point  $a = (\alpha^3, \alpha^2)$  de  $S_F \setminus \{0\}$ , il existe *deux* courbes tendant vers l'infini  $\mathcal{C}_u = (\frac{1}{u}, \alpha u)$  et  $\mathcal{C}'_u = (-\frac{1}{u}, -\alpha u)$ , où  $u \in ]0, +\infty[$ , telles que leurs images tendent vers  $a$  avec les deux directions, données en figure 4.30. Donc  $h_F(U_1)$  et  $h_F(U_3)$  sont collées le long de la partie de  $S_F$ , là où la première coordonnée  $\alpha_1$  est positive. De la même manière,  $h_F(U_2)$  et  $h_F(U_4)$  sont collées le long de la partie de  $S_F$ , là où la première coordonnée  $\alpha_1$  est négative. L'ensemble  $V_F$  est donc de la forme donnée en figure 4.31 .

La partie singulière de  $V_F$  est l'origine 0. Ceci est aussi un exemple pour lequel la partie singulière de l'ensemble des Valette n'est ni l'ensemble  $S_F$ , ni l'ensemble  $K_0(F)$ . Notons qu'ici, l'ensemble  $K_0(F)$  sort du plan  $(0\alpha_1\alpha_2)$  avec les ensembles  $F(U_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , seul l'ensemble  $S_F$  est dans le plan  $(0\alpha_1\alpha_2)$ .

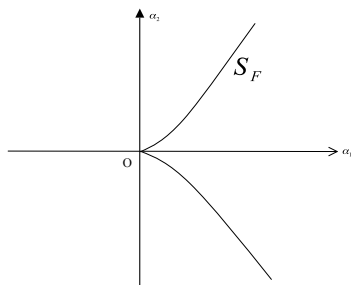


FIGURE 4.25 – L'ensemble  $S_F$  de l'application  $F(x_1, x_2) = ((x_1x_2)^2, (x_1x_2)^3 + x_1)$

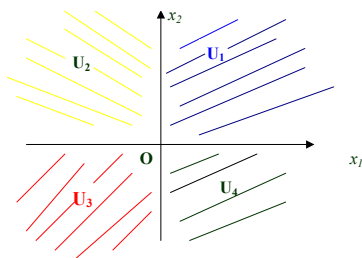


FIGURE 4.26 – La partition de l'espace  $(0x_1x_2)$ , divisée par  $SingF$ , pour l'application  $F(x_1, x_2) = ((x_1x_2)^2, (x_1x_2)^3 + x_1)$

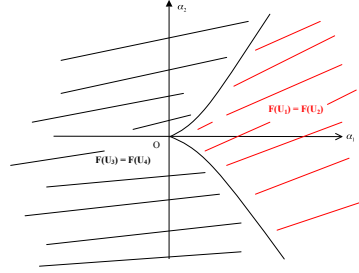


FIGURE 4.27 – Les images  $F(U_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , où  $\{U_i\}_{i=1, \dots, 4}$  est la partition de  $\mathbb{R}^2_{(x_1, x_2)} \setminus \text{Sing} F$ , pour l'application  $F(x_1, x_2) = ((x_1 x_2)^2, (x_1 x_2)^3 + x_1)$

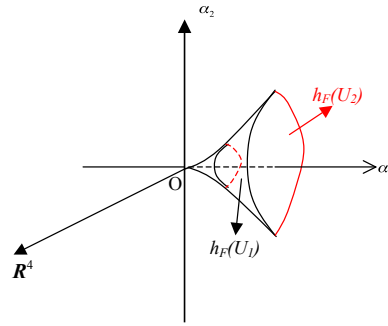


FIGURE 4.28 – Les deux nappes  $h_F(U_1)$  et  $h_F(U_2)$  de l'ensemble des Valette  $V_F$  pour l'application  $F(x_1, x_2) = ((x_1 x_2)^2, (x_1 x_2)^3 + x_1)$

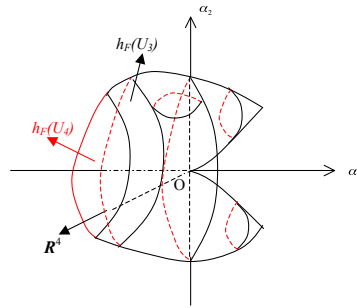


FIGURE 4.29 – Les deux nappes  $h_F(U_3)$  et  $h_F(U_4)$  de l'ensemble des Valette  $V_F$  pour l'application  $F(x_1, x_2) = ((x_1 x_2)^2, (x_1 x_2)^3 + x_1)$

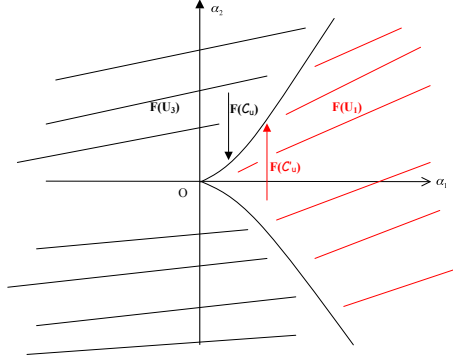


FIGURE 4.30 – Les deux manières (directions) de tendre vers un point de l’ensemble de Jelonek  $S_F$  pour l’application  $F(x_1, x_2) = ((x_1x_2)^2, (x_1x_2)^3 + x_1)$

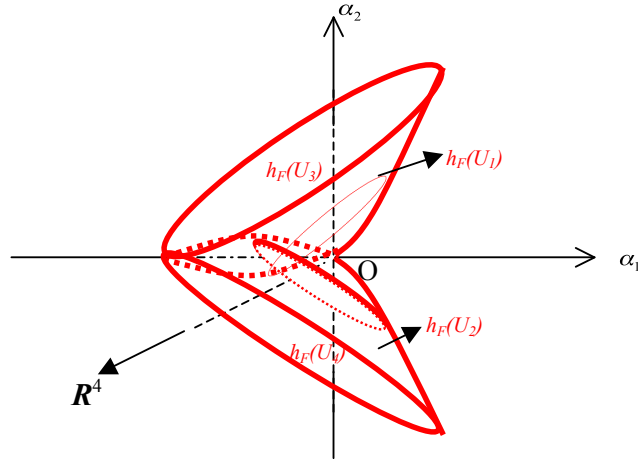


FIGURE 4.31 – L’ensemble  $V_F$  de l’application  $F(x_1, x_2) = ((x_1x_2)^2, (x_1x_2)^3 + x_1)$

Une question naturelle se pose de savoir si, en général, la stratification de  $S_F$  est une stratification de Thom-Mather et de Whitney. Pour étudier la stratification de Thom-Mather, nous allons utiliser de nouveau des courbes correspondantes aux façons de  $S_F$  pour créer les voisinages tubulaires. Pour étudier la stratification de Whitney, nous allons utiliser les courbes correspondantes aux façons de  $S_F$ , en regardant le changement de “degré” : Les courbes correspondantes de la même façon sont “parallèles”, sinon, elles changent de “forme”, ceci nous fournit le comportement des espaces tangents (voir la figure 4.32).

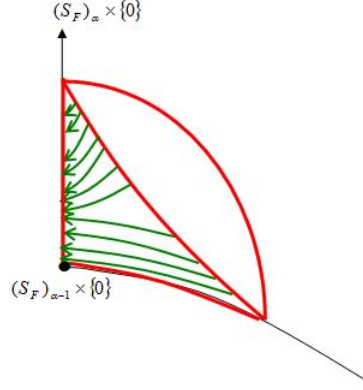


FIGURE 4.32 – Les courbes correspondantes aux façons de l'ensemble  $S_F$

Pour cette étude, nous allons, dans la prochaine section, établir une relation d'ordre entre les façons des strates de la partition de  $S_F$  définie par  $\Xi^*$  comme dans la partie suivante :

## 4.5 Partition de $S_F$ définie par la relation “<”

**Définition 4.5.1.** Soit  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application polynomiale telle que  $S_F \neq \emptyset$ . Nous définissons :

$$P_{S_F} = \cup_{a \in S_F} \Xi(a).$$

**Exemple 4.5.2.** Soit l'application polynomiale  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  telle que  $F = (x_1, x_1 x_2, x_1 x_3)$  (voir exemple 4.0.4, page 69), l'ensemble  $S_F$  est le plan  $(0 \alpha_2 \alpha_3)$  et nous avons

$$P_{S_F} = \{(2, 3)[1], (2)[1, 3], (3)[1, 2]\}.$$

**Remarque 4.5.3.** Nous pouvons toujours déterminer l'ensemble  $P_{S_F}$  sans décrire  $S_F$ . Pour une application polynomiale donnée, nous pouvons toujours déterminer les indices  $(k_i)[k_j] \in \Xi(a)$  tels que  $a \in S_F$ , en considérant les coordonnées tendant vers l'infini et les coordonnées tendant vers un nombre dans  $\mathbb{C}$  qui dépend ou non du point  $a$  quand  $a$  décrit  $S_F$ . En fait, quand nous pouvons déterminer l'ensemble  $P_{S_F}$ , nous pouvons aussi déterminer l'ensemble  $S_F$ .

Donnons deux exemples de ce fait :

**Exemple 4.5.4.** Considérons l'application  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  définie par  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 x_2, x_1 x_3)$ . Supposons que la suite  $(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})$  tende vers l'infini mais que la suite  $(x_{1,k}, x_{1,k} x_{2,k}, x_{1,k} x_{3,k})$  ne tende pas vers l'infini. Nous voyons

que  $x_{1,k}$  ne peut pas tendre vers l'infini, donc  $x_{1,k}$  tend vers 0 ou  $x_{1,k}$  tend vers un nombre  $\lambda$  non nul dans  $\mathbb{C}$ . Si  $x_{1,k}$  tend vers un nombre  $\lambda \neq 0$  alors  $x_{2,k}$  et  $x_{3,k}$  ne peuvent pas tendre vers l'infini, d'où la contradiction. Donc  $x_{1,k}$  tend vers 0 et  $x_{2,k}$  tend vers l'infini ou  $x_{3,k}$  tend vers l'infini. Supposons que  $x_{3,k}$  tende vers l'infini et  $x_{2,k}$  tende vers un nombre complexe  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}$ , alors le point  $(0, 0, \nu)$  est inclus dans  $S_F$ , pour tout  $\nu \in \mathbb{C}$ . Mais  $\lambda$  ne dépend pas du point  $(0, 0, \alpha_3)$  quand ce point décrit l'axe  $0\alpha_3$ . De la même façon pour  $x_{3,k}$ . Donc, nous avons :

$$P_{S_F} = \{(2, 3)[1], (2)[1, 3], (3)[1, 2]\}.$$

**Exemple 4.5.5.** Soit l'application polynomiale  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  telle que  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1)$ . Supposons que la suite  $(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})$  tende vers l'infini mais que la suite  $(x_{1,k}x_{2,k}, x_{2,k}x_{3,k}, x_{3,k}x_{1,k})$  ne tende pas vers l'infini. Nous voyons que les rôles de  $x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k}$  sont les mêmes. Nous voyons aussi que les coordonnées  $x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k}$  peuvent tendre vers l'infini, vers 0, mais ne peuvent pas tendre vers un nombre complexe non nul. Supposons que deux coordonnées tendent vers l'infini, par exemple  $x_{1,k}$  et  $x_{2,k}$  tendent vers l'infini, alors  $x_{1,k}x_{2,k}$  tend vers l'infini, d'où la contradiction avec  $(x_{1,k}x_{2,k}, x_{2,k}x_{3,k}, x_{3,k}x_{1,k})$  ne tend pas vers l'infini. Donc il y n'a qu'une coordonnée tendant vers l'infini. Finalement nous avons :

$$P_{S_F} = \{(1)[2, 3], (3)[1, 2], (2)[1, 3]\}.$$

**Proposition 4.5.6.** *L'ensemble  $P_{S_F}$  détermine une partition de  $S_F$  qui est, en fait, une stratification de  $S_F$ .*

Nous nous proposons de définir une relation d'ordre (partielle) entre les éléments de  $P_{S_F}$ . Pour ce faire, rappelons que tout élément  $\kappa$  de  $P_{S_F}$  s'écrit  $\kappa := (I_p)[J_q]$ , où

$$\begin{cases} \{I_p\} = \{i_1, \dots, i_p\}, \{J_q\} = \{j_1, \dots, j_q\}, \\ \{i_1, \dots, i_p\} \cup \{j_1, \dots, j_q\} \subset \{1, 2, \dots, n\}, \\ \text{L'ensemble } \{i_1, \dots, i_p\} \text{ est toujours différent de l'ensemble vide,} \\ \text{L'ensemble } \{j_1, \dots, j_q\} \text{ peut être vide.} \end{cases}$$

**Définition 4.5.7.** Soient  $\kappa, \kappa' \in P_{S_F}$  deux façons étoiles de  $S_F$  telles que  $\kappa = (I_p)[J_q]$ , et  $\kappa' = (I_{p'})[J_{q'}]$ . Nous définissons la relation d'ordre partielle  $\kappa < \kappa'$  dans  $P_{S_F}$  si nous avons l'un des trois cas suivants :

- 1)  $\{I_p\} \supsetneq \{I_{p'}\}$  et  $\{J_q\} \supset \{J_{q'}\}$ .
  - 2)  $\{I_p\} = \{I_{p'}\}$  et  $\{J_q\} \supsetneq \{J_{q'}\}$ .
  - 3)  $\{I_p\} \cup \{J_q\} = \{I_{p'}\} \cup \{J_{q'}\}$  et  $\kappa$  est une façon étoile de  $\kappa'$ , c'est-à-dire  $\kappa$  est obtenu de  $\kappa'$  en mettant certains indices en étoile.
- Si  $\kappa < \kappa'$ , nous notons aussi  $\kappa' > \kappa$ .



**Exemple 4.5.8.** *i)* Considérons l'exemple 4.2.22, page 80, nous avons

$$P_{S_F} = \{(3)[1, 2], (3)[2], (1, 3)[2], (2)[1, 3], (1)[2, 3], (1)[2]\}.$$

Nous voyons que  $(1, 3)[2] < (1)[2]$  (exemple de 1)) et  $(3)[1, 2] < (3)[2]$  (exemple de 2)).

*ii)* Considérons l'exemple 4.4.6, page 92. Nous avons  $(3^*)[1^*, 2^*] < (3)[1]$  et  $(3^*)[1^*, 2^*] < (3)[2]$  (exemple de 2)) ;  $(3^{**})[1^{**}, 2^{**}] < (3^*)[1^*, 2^*]$  (exemple de 3)).

**Définition 4.5.9.** Nous disons que  $a < a'$ , où  $a, a' \in S_F$ , si pour tout  $\kappa' \in \Xi^*(a')$ , il existe  $\kappa \in \Xi^*(a)$  tel que  $\kappa \equiv \kappa'$  ou  $\kappa < \kappa'$ .

En fait, nous utiliserons une définition équivalente, plus facile à appliquer :

**Définition 4.5.10.** Soient  $a, a' \in S_F$ . Nous définissons  $a < a'$  si nous avons l'un des deux cas suivants :

- 1)  $\Xi^*(a) \supset \Xi^*(a')$ .
- 2) Pour tout  $\kappa' \in \Xi^*(a')$ , il existe  $\kappa \in \Xi^*(a)$  tel que  $\kappa \equiv \kappa'$  ou  $\kappa < \kappa'$ .

Dans cette définition, la condition 2) est en fait plus forte que la condition 1).

La définition est illustrée par l'exemple suivant :

**Exemple 4.5.11.** Considérons l'application  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  telle que  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2, x_2 x_3, x_1 x_2 x_3)$  (voir exemple 4.2.22, page 80). Nous notons respectivement  $V_1, V_2$  et  $V_3$  les strates de dimension 2, connexes  $(0\alpha_2\alpha_3) \setminus (0\alpha_2 \cup 0\alpha_3)$ ,  $(0\alpha_1\alpha_3) \setminus (0\alpha_1 \cup 0\alpha_3)$  et  $(0\alpha_1\alpha_2) \setminus (0\alpha_1 \cup 0\alpha_2)$ . De la même façon, nous notons respectivement  $V_4, V_5$  et  $V_6$  les strates de dimension 1, connexes  $0\alpha_3 \setminus \{0\}$ ,  $0\alpha_2 \setminus \{0\}$  et  $0\alpha_1 \setminus \{0\}$ . Maintenant, choisissons un point  $a_i$  dans chacune des strates  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned} \Xi(a_1) &= \{(3)[2]\}, \Xi(a_2) = \{(1)[2]\}, \Xi(a_3) = \{(2)[1, 3]\}, \\ \Xi(a_4) &= \{(1, 3)[2]\}, \Xi(a_5) = \{(2)[1, 3], (3)[1, 2]\}, \Xi(a_6) = \{(1)[2, 3], (2)[1, 3]\}, \\ \Xi(0) &= \{(1)[3], (1)[2], (1)[2, 3], (3)[1, 2], (2)[1, 3]\}. \end{aligned}$$

1) Considérons les strates de dimension 1 :

+  $V_4 \subset \overline{V_1}$  et  $\Xi(a_4) = \{(1, 3)[2]\}, \Xi(a_1) = \{(3)[2]\}$  et  $(1, 3)[2] < (3)[2]$ . Donc nous avons  $a_4 < a_1$ .

+  $V_4 \subset \overline{(V_2)}$  et  $\Xi(a_4) = \{(1, 3)[2]\}, \Xi(a_2) = \{(1)[2]\}$  et  $(1, 3)[2] < (1)[2]$ . Donc nous avons  $a_4 < a_2$ .

+  $V_5 \subset \overline{V_1}$  et  $\Xi(a_5) = \{(2)[1, 3], (3)[1, 2]\}, \Xi(a_1) = \{(3)[2]\}$  et  $(3)[1, 2] < (3)[2]$ . Donc nous avons  $a_5 < a_1$ .

+  $V_5 \subset \overline{V_3}$  et  $\Xi(a_5) = \{(2)[1, 3], (3)[1, 2]\} \supset \Xi(a_3) = \{(2)[1, 3]\}$ . Donc nous avons  $a_5 < a_3$ .

+  $V_6 \subset \overline{V_2}$  et  $\Xi(a_6) = \{(1)[2, 3], (2)[1, 3]\}$ ,  $\Xi(a_2) = \{(1)[2]\}$  et  $(1)[2, 3] < (1)[2]$ .  
Donc nous avons  $a_6 < a_2$ .

+  $V_6 \subset \overline{V_3}$  et  $\Xi(a_6) = \{(1)[2, 3], (2)[1, 3]\} \supset \Xi(a_3) = \{(2)[1, 3]\}$ . Donc nous avons  $a_6 < a_3$ .

Considérons la strate de dimension 0, c'est le point origine 0, nous avons  $0 \in \overline{V_i}$  et  $\Xi(a_i) \subset \Xi(0)$ . Donc nous avons  $0 < a_i$ , pour  $i = 1, \dots, 6$ .

Pour deux points  $a$  et  $a'$  d'une même strate, nous avons  $\Xi(a) = \Xi(a')$ . Nous noterons alors  $strate(a)$  la strate contenant le point  $a$ .

**Théorème 4.5.12.** *Soient  $a, a' \in S_F$ . Alors  $a < a'$  si et seulement si*

$$strate(a) \subset \overline{strate(a')},$$

où  $strate(a)$  et  $strate(a')$  sont des strates de la stratification de  $S_F$  définie par  $\Xi^*$ .

*Démonstration.* Nous avons les deux cas suivants :

1)  $or(a) > or(a')$  : l'ensemble d'équations du système d'équations de  $\overline{strate(a)}$  contient l'ensemble d'équations du système d'équations de  $\overline{strate(a')}$ . Cela signifie qu'il existe  $a'' \in S_F$  telle que  $\overline{strate(a)} = \overline{strate(a') \cap strate(a'')}$  et donc  $strate(a) \subset \overline{strate(a')}$ .

2)  $or(a) = or(a')$  : il existe une façon étoile  $\kappa = (I_p)(J_q)$  de  $strate(a)$  et une façon étoile  $\kappa' = (I'_p)(J'_q)$  de  $strate(a')$  telles que  $\kappa < \kappa'$ . Dans ce cas-ci, nous avons deux possibilités :

a) ou bien  $I_p \cup J_q \supsetneq I'_p \cup J'_q$  :  $\kappa'$  n'est pas une façon étoile de  $\kappa$ . Il existe  $a'' \in S_F$  tel qu'une façon  $\kappa'' = (I''_p)(J''_q)$  de  $a''$  satisfait  $I'_p \cup I''_p = I_p$ ,  $J'_p \cup J''_p = J_p$ . De la même manière que dans le cas 1), nous obtenons le résultat du théorème.

b) ou bien  $I_p \cup J_q = I'_p \cup J'_q$  :  $\kappa$  est une façon étoile de  $\kappa'$ . Donc  $strate(a)$  est la partie singulière de  $strate(a')$  et  $strate(a) \subset \overline{strate(a')}$ . □

**Proposition 4.5.13.** *La relation d'ordre “<” définit une stratification de  $S_F$ , laquelle satisfait la condition de frontière.*

*Démonstration.* Notons

$$S_F = (S_F)_{n-1} \supset (S_F)_{n-2} \supset \dots \supset (S_F)_0 \supset (S_F)_{-1} = \emptyset$$

la stratification de  $S_F$  définie par la relation “<” et notons  $V_{n-\alpha} = (S_F)_{n-\alpha} \setminus (S_F)_{n-\alpha-1}$ .

Prenons maintenant le point  $a \in \overline{V_{n-\alpha}} \setminus V_{n-\alpha}$ , alors  $a < a'$  et  $\Xi^*(a) \neq \Xi^*(a')$ , pour tout  $a' \in V_{n-\alpha}$ . Par le théorème 4.5.12, nous avons  $strate(a) \subsetneq \overline{strate(a')}$  et nous en déduisons la proposition. □

## 4.6 Voisinages tubulaires des strates de la stratification de Thom-Mather de l'ensemble de Jelonek définie par les façons

Dans la partie 4.8, page 116, nous allons étudier le nombre des façons d'une strate de dimension la plus grande dans  $S_F$ . Nous allons prouver qu'en fait il peut y avoir plusieurs façons sur une strate de dimension la plus grande de  $S_F$ . L'idée pour construire les voisinages tubulaires est d'utiliser les courbes correspondant aux façons et l'homotopie entre les courbes qui ne sont pas du même "type" (dans le cas où il y a plusieurs façons dans une strate).

**Théorème 4.6.1.** *Soit  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application polynomiale dominante. La stratification de  $S_F$  définie par les façons est une stratification de Thom-Mather. Elle satisfait donc la condition de trivialité topologique locale.*

*Démonstration.* Prouvons ici pour le cas d'une application polynomiale  $F$  de  $\mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3$  dans  $\mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$ . Le cas général  $n > 3$ , peut être prouvé de la même manière.

Supposons que  $S_F$  ne soit pas vide et notons

$$S_F = S_2 \supset S_1 \supset S_0 \supset \emptyset$$

une stratification de  $S_F$  définie par  $\Xi^*$ . Pour tout  $\nu = 0, 1, 2$ ,  $S_\nu = \emptyset$  ou  $S_\nu \setminus S_{\nu-1} = \cup_{1 \leq i_\nu \leq 3} S_\nu^{i_\nu}$  et  $S_\nu^{i_\nu}$  est lisse, de dimension  $\nu$ .

Pour chaque strate  $S_\nu^{i_\nu}$ , nous allons construire un voisinage tubulaire  $T_\nu^{i_\nu}(\varepsilon_\nu^{i_\nu})$ , c'est-à-dire que  $T_\nu^{i_\nu}(\varepsilon_\nu^{i_\nu})$  est un tube de rayon  $0 < \varepsilon_\nu^{i_\nu} < 1$ , tel que pour  $\nu$  fixé et pour tout  $i_\nu$ , les  $T_\nu^{i_\nu}(\varepsilon_\nu^{i_\nu})$  ne se rencontrent pas. Les voisinages tubulaires que nous allons construire sont du type des voisinages tubulaires effilés définis par Marie-Hélène Schwartz dans [MHS1, MHS2], les rayons et les fibres des voisinages tubulaires sont construits à l'aide des courbes correspondantes aux façons.

Considérons une strate  $S_1^1$  lisse de dimension 1 et  $T_1^1(\varepsilon_1^1)$  son voisinage, alors  $\overline{S_1^1}$  est l'intersection  $\overline{S_2^1} \cap \overline{S_2^2}$ , où  $S_2^1$  et  $S_2^2$  sont des strates lisses, de dimension 2 de  $S_F$ . Pour un point  $b \in S_1^1$ , nous considérons les deux cas suivants :

1)  $or(b) = 1$  : sans perte de généralité, nous pouvons supposer que :

$$\Xi^*(a) = \{(3)[1]\}, \forall a \in S_2^1; \quad \Xi^*(a') = \{(3)[2]\}, \forall a' \in S_2^2; \quad \Xi^*(b) = \{(3)[1, 2]\}, \forall a \in S_1^1.$$

Soit

$$\begin{cases} \phi_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0 \\ \phi_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0. \end{cases} \quad (\overline{S_1^1})$$

l'équation de  $\overline{S_1^1}$ .

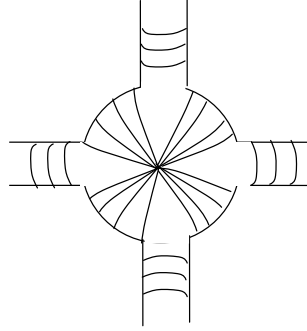


FIGURE 4.33 – Voisinage tubulaire de la stratification de Thom-Mather de l'ensemble de Jelonek  $S_F$ , définie par les façons

Prenons un point  $a_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in (T_2^1(\varepsilon_2^1) \cup T_1^1(\varepsilon_1^1)) \setminus S_F$ . Par le lemme 1.2.3, page 27 (voir aussi [NT1]), et puisque  $F$  est dominante, nous avons

$$F(\mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3) \cup S_F = \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3.$$

Donc  $a_1$  est contenu dans  $F(\mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3)$ . Il existe une courbe  $\gamma_u^1$  :

$$\gamma_u^1 : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3, u \mapsto \gamma_u^1 := \gamma^1(u),$$

telle que, d'une part,  $\gamma_u^1$  tend vers l'infini et  $F(\gamma_u^1)$  tend vers un point  $b = (b_1, b_2, b_3)$  de  $S_1^1$  lorsque  $u$  tend vers l'infini, et telle que, d'autre part,  $F(\gamma_1^1) = a_1$ . En fait,  $\gamma_1^1$  est contenu dans  $F^{-1}(a_1)$ . Puisque  $\Xi(b) = \{(3)[1, 2]\}$  alors la courbe  $\gamma_u^1$  peut s'écrire sous la forme :

$$\gamma_u^1 = \left( f_1(b_1, b_2, b_3) + \frac{1}{\lambda_1 u}, f_2(b_1, b_2, b_3) + \frac{1}{\mu_1 u}, f_3(b_1, b_2, b_3, \lambda_1, \mu_1, u) \right),$$

où  $f_1, f_2, f_3$  sont des polynômes et  $f_3(b_1, b_2, b_3, \lambda_1, \mu_1, u)$  tend vers l'infini lorsque  $u$  tend vers l'infini. Puisque  $F(\gamma_1^1) = a_1$  et  $b \in S_1^1$  alors  $(b_1, b_2, b_3, \lambda_1, \mu_1)$  est une solution du système d'équations

$$\begin{cases} f_1(b_1, b_2, b_3) + \frac{1}{\lambda_1} = \alpha_1 \\ f_2(b_1, b_2, b_3) + \frac{1}{\mu_1} = \beta_1 \\ f_3(b_1, b_2, b_3, \lambda_1, \mu_1, 1) = \gamma_1 \\ \phi_1(b_1, b_2, b_3) = 0 \\ \phi_2(b_1, b_2, b_3) = 0, \end{cases}$$

nous pouvons donc toujours déterminer la courbe  $\gamma_u^1$ .

Cherchons maintenant une suite de courbes  $\{\gamma_u^j\}_{j=2,3,\dots}$  :

$$\gamma_u^j : [t, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \quad (t \in \mathbb{C}), \quad u \mapsto \gamma_u^j := \gamma^j(u),$$

telles que, d'une part,  $F(\gamma_t^j)$  soit dans  $T_2^1(\varepsilon_2^1) \cap T_1^1(\varepsilon_1^1)$ , et que, d'autre part, lorsque  $u$  tend vers l'infini,  $\gamma_u^j$  tende vers l'infini et  $F(\gamma_u^j)$  tende vers  $b = (b_1, b_2, b_3)$  qui est déjà fixé. En utilisant de nouveau la façon (3)[1, 2] du point  $b$ , la courbe  $\gamma_u^j$  admet la forme :

$$\gamma_u^j = \left( f_1(b_1, b_2, b_3) + \frac{1}{\lambda_j u}, f_2(b_1, b_2, b_3) + \frac{1}{\mu_j u}, f_3(b_1, b_2, b_3, \lambda_j, \mu_j, u) \right),$$

où  $f_3^j(b_1, b_2, b_3, \lambda_j, \mu_j, u)$  tend vers l'infini lorsque  $u$  tend vers l'infini.

Notons  $a_j := F(\gamma_t^j)$ . La suite  $\{a_j\}$  se comporte comme la suite  $F(\gamma_u^1)$  en remplaçant la rôle de  $u$  par  $\lambda_j$  et  $\mu_j$ . Puisque  $F(\gamma_u^j)$  tend vers  $b \in S_1^1$  avec la façon (3)[1, 2] < (3)[1], nous pouvons choisir  $\lambda_j$  et  $\mu_j$  tels que  $\lambda_j$  tende vers l'infini et  $\mu_j = \mu_1$ , pour tout  $j > 2$ . Alors la suite  $\{a_j\}$  tend vers un point  $a$  sur  $S_2^1$ . Définissons :

$$\begin{aligned} \pi_2(a_j) &:= a, \quad \forall j = 2, 3, \dots, \quad \pi_1(a_j) := b, \quad \pi_1(a) := b, \\ \rho_1(a_j) &:= (\text{la limite des longueurs des courbes reliant } a_j \text{ et } b) = \lim_{a_j \rightarrow a} \widehat{a_j b} = \widehat{ab}. \end{aligned}$$

Nous voyons que  $\pi_1 \pi_2(a_j) = \pi_1(a_j)$  et  $\rho_1 \pi_2(a_j) = \rho_1(a_j)$ .

2) *or*( $b$ ) = 2 : sans perte de généralité, nous pouvons supposer que :

$$\Xi^*(a) = \{(3)[1, 2]\}, \quad \forall a \in S_2^1, \quad \Xi^*(a') = \{(2)[1, 3]\}, \quad \forall a' \in S_2^2, \quad \Xi^*(b) = \{(3)[1, 2], (2)[1, 3]\}, \quad \forall a \in S_1^1.$$

Comme dans le cas 1), pour un point  $a_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in (T_2^1(\varepsilon_2^1) \cup T_1^1(\varepsilon_1^1)) \setminus S_F$ , il existe des courbes  $\gamma_u$  et  $\gamma'_u$  de  $[1, +\infty)$  dans  $\mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3$  tendant vers l'infini avec les façons (3)[1, 2] et (2)[1, 3], respectivement et telles que

i)  $F(\gamma_u)$  et  $F(\gamma'_u)$  tendent vers un point  $b$  de la strate  $S_1^1$ , lorsque  $u$  tend vers l'infini,

ii)  $F(\gamma_1) = F(\gamma'_1) = a_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ .

Puisque  $F(\gamma_u)$  et  $F(\gamma'_u)$  tendent vers le point  $b = (b_1, b_2, b_3)$ , nous avons :

$$\begin{aligned} F(\gamma_1) &= \left( b_1 + \frac{1}{\lambda u^{n_1}}, b_2 + \frac{1}{\mu u^{n_2}}, b_3 + \frac{1}{\nu u^{n_3}} \right), \\ F(\gamma'_1) &= \left( b_1 + \frac{1}{\lambda' u'^{n'_1}}, b_2 + \frac{1}{\mu' u'^{n'_2}}, b_3 + \frac{1}{\nu' u'^{n'_3}} \right). \end{aligned}$$

Puisque  $F(\gamma_1) = F(\gamma'_1) = a_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , alors nous avons :

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda'} = \alpha_1 - b_1, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu'} = \alpha_2 - b_2, \quad \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu'} = \alpha_3 - b_3.$$

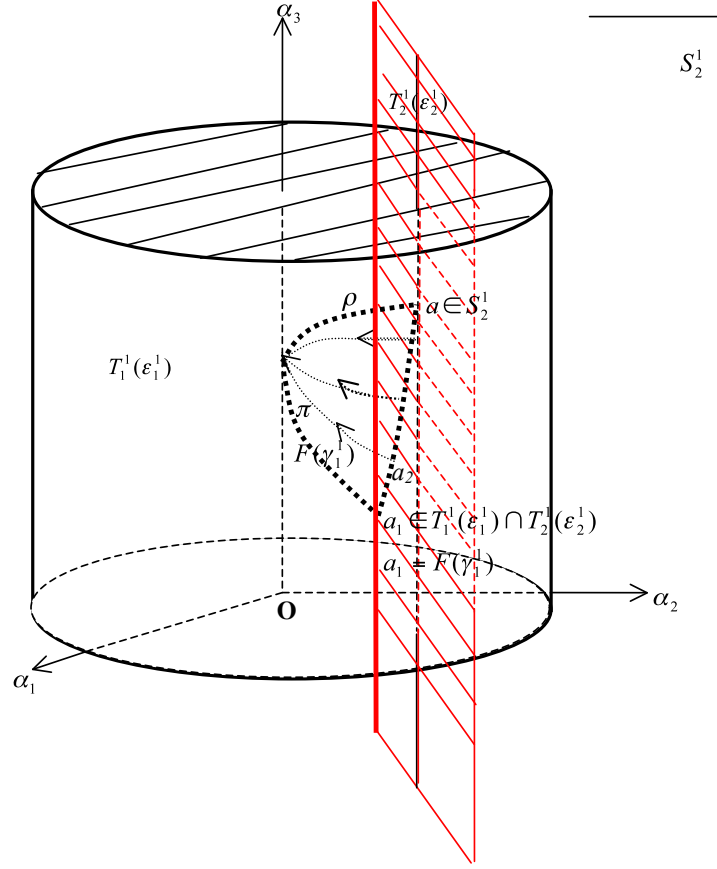


FIGURE 4.34 – Les fonctions  $\rho$  et  $\pi$  pour la stratification de Thom-Mather de la stratification de  $S_F$  définie par les façons

Soient

$$\begin{aligned} \varphi : [1, +\infty) &\rightarrow (a_1, b) \text{ telle que } \varphi(u) := F(\gamma_u), \\ \psi : [1, +\infty) &\rightarrow (a_1, b) \text{ telle que } \psi(u) := F(\gamma'_u). \end{aligned}$$

Définissons  $\Phi : [1, +\infty) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $\Phi_s = \Phi(u, s) := s\varphi(u) + (1-s)\psi(u)$ . Nous avons  $\Phi_0 = \psi$  et  $\Phi_1 = \varphi$ . De plus, par un calcul facile,  $\Phi(u, t)$  tend vers  $b$  lorsque  $u$  tend vers l'infini et  $\Phi(1, t) = a_1$ . Cela implique que  $\varphi$  et  $\psi$  sont homotopes, c'est-à-dire qu'il y a toujours une famille de chemins reliant les deux chemins  $F(\gamma_u)$  et  $F(\gamma'_u)$ .

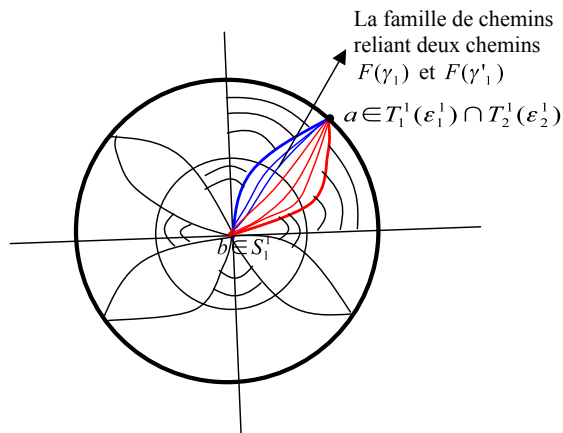


FIGURE 4.35 – Homotopies entre  $F(\gamma_u)$  et  $F(\gamma'_u)$

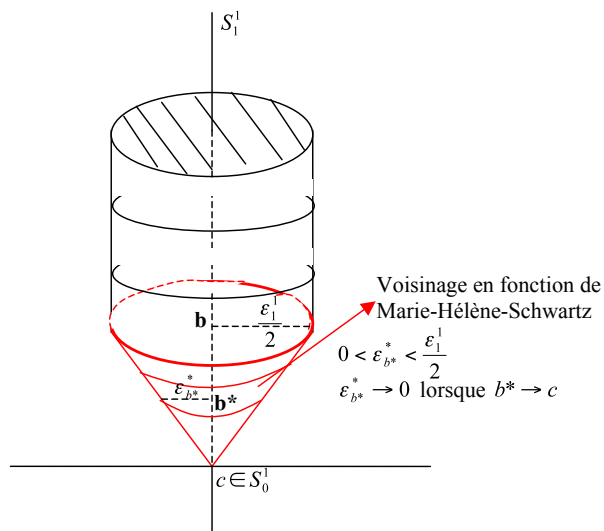


FIGURE 4.36 – Voisinage tubulaire d'une strate de la stratification de Thom-Mather de l'ensemble  $S_F$  définie par les façons

Notons que dans le cas de dimension  $n > 3$  et si l'ordre d'un point  $b$  sur une strate de  $S_F$  est  $r > 2$ , alors entre des chemins  $F(\gamma_u^1), F(\gamma_u^2), \dots, F(\gamma_u^r)$ , nous considérons

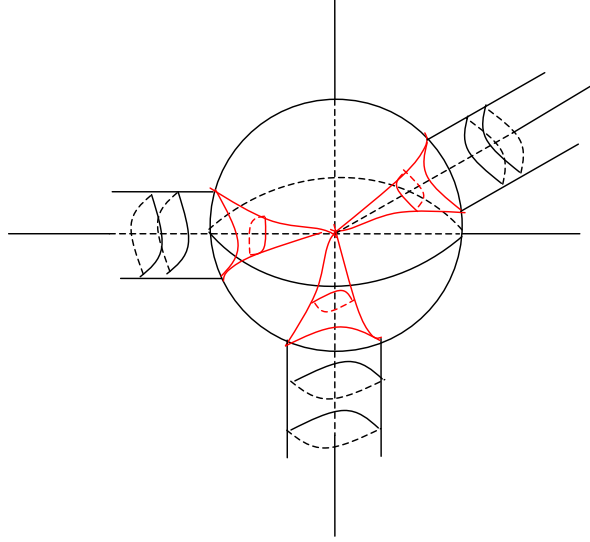


FIGURE 4.37 – Voisinage tubulaire des strates de la stratification de Thom-Mather de l'ensemble  $S_F$ , définie par des façons

la famille de courbes  $\Phi'(u, s)$ , où  $\Phi' : [1, +\infty) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  telle que

$$\Phi'_s = \Phi(u, s) := s_1 F(\gamma_u^1) + s_2 F(\gamma_u^2) + \cdots + s_r F(\gamma_u^r),$$

et  $s_1 + s_2 + \cdots + s_r = 1$  et  $s_i > 0$ , pour  $i = 1, \dots, r$ . Les voisinages tubulaires ainsi construits satisfont les conditions de Thom-Mather ([Th], [M1], voir définition 2.4.8).

La stratification de l'ensemble de Jelonek d'une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , définie par les façons, est donc une stratification de Thom-Mather.  $\square$

**Exemple 4.6.2.** Revenons à l'exemple 4.1.5, page 71 (aussi l'exemple 4.2.20, page 79) pour l'application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  telle que

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - 1, x_2 + 2, (x_1^2 - 1)(x_2 + 2)x_3).$$

Une stratification de l'ensemble  $S_F$  définie par  $\Xi$  est donnée par :

$$S_F = \{\alpha_1 = 0\} \cup \{\alpha_2 = 0\} \supset 0\alpha_3 \supset \emptyset.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \Xi(a) &= \{(3)[1]\}, \forall a \in \{\alpha_1 = 0\} \setminus 0\alpha_3, \\ \Xi(a') &= \{(3)[2]\}, \forall a' \in \{\alpha_2 = 0\} \setminus 0\alpha_3, \\ \Xi(b) &= \{(3)[1, 2]\}, \forall b \in 0\alpha_3. \end{aligned}$$



Prenons un point  $a_1 = (3, 1, 3) \in \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3 \setminus S_F$ , alors  $a_1 \in F(\mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3)$ . Cherchons maintenant une courbe  $\gamma_u^1 : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3$  et le point  $b = (0, 0, \alpha_3) \in 0\alpha_3$  tels que, d'une part,  $\gamma_u^1$  tende vers l'infini et  $F(\gamma_u^1)$  tende vers le point  $b$  avec la façon (3)[1, 2] lorsque  $u$  tend vers l'infini, et que, d'autre part,  $F(\gamma_1^1)$  soit  $a_1$ . Nous avons

$$\gamma_u^1 = \left( 1 + \frac{1}{\lambda u}, -2 + \frac{1}{\mu u}, x_{3,u} \right), \quad \text{où } x_{3,u} \rightarrow \infty,$$

$$F(\gamma_u^1) = \left( \frac{2}{\lambda u} + \frac{1}{\lambda^2 u^2}, \frac{1}{\mu u}, \left( \frac{2}{\lambda u} + \frac{1}{\lambda^2 u^2} \right) \frac{1}{\mu u} x_{3,u} \right).$$

Puisque  $F(\gamma_u^1)$  tend vers  $b = (0, 0, \alpha_3)$ , il vient :

$$x_{3,u} = \frac{\lambda \mu u^2}{2} \alpha_3,$$

$$F(\gamma_u^1) = \left( \frac{2}{\lambda u} + \frac{1}{\lambda^2 u^2}, \frac{1}{\mu u}, \alpha_3 + \frac{\alpha_3}{2\lambda u} \right).$$

Puisque  $F(\gamma_1^1) = a_1 = (3, 1, 3)$  nous pouvons choisir  $\lambda = \mu = 1$  et  $\alpha_3 = 2$ . Nous avons donc  $b = (0, 0, 2)$ .

Prenons une courbe  $\gamma_u^j : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3$  telle que  $\gamma_u^j$  tende vers l'infini et  $F(\gamma_u^j)$  tende vers le point  $b = (0, 0, 2)$  avec la façon (3)[1, 2] lorsque  $u$  tend vers l'infini, pour  $j = 2, 3, \dots$ . Nous avons

$$\gamma_u^j = \left( 1 + \frac{1}{\lambda_j u}, -2 + \frac{1}{\mu_j u}, \lambda_j \mu_j u^2 \right),$$

$$F(\gamma_u^j) = \left( \frac{2}{\lambda_j u} + \frac{1}{\lambda_j^2 u^2}, \frac{1}{\mu_j u}, 2 + \frac{1}{\lambda_j u} \right).$$

Soit

$$a_j := F(\gamma_1^j).$$

Alors

$$a_j = \left( \frac{2}{\lambda_j} + \frac{1}{\lambda_j^2}, \frac{1}{\mu_j}, 2 + \frac{1}{\lambda_j} \right).$$

Pour que  $a_j$  tende vers un point  $a$  de la strate  $\{\alpha_1 = 0\} \setminus 0\alpha_3$  avec la façon (3)[1],  $\lambda_j$  doit tendre vers l'infini lorsque  $j$  tend vers l'infini et  $\mu_j = \mu = 1$ , pour  $j = 2, 3, \dots$ . Nous avons donc  $a = (0, 1, 2)$ . Nous pouvons choisir les voisinages tubulaires de la strate  $S_1 = 0\alpha_3$  et de la strate  $S_2^1 = \{\alpha_1 = 0\} \setminus 0\alpha_3$  comme des tubes  $T_1(\frac{1}{2})$  et  $T_2^1(\frac{1}{2})$  de rayon  $\frac{1}{2}$ . Les applications  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  et  $\rho_1$  sont définies pour des points  $a, a_j \in T_1(\frac{1}{2}) \cap T_2^1(\frac{1}{2})$  comme suit :

$$\begin{aligned} \pi_2(a_j) &:= a, \quad \forall j = 2, 3, \dots, \\ \pi_1(a_j) &:= b, \\ \pi_1(a) &:= b, \\ \rho_1(a_j) &:= \widehat{ab}. \end{aligned}$$

Nous opérons de la même façon pour la strate  $S_2^2 = \{\alpha_2 = 0\}$ . Pour construction, notre stratification est alors une stratification de Thom-Mather.

**Exemple 4.6.3.** Soit l'application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  définie par

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2, x_2 x_3, x_3 x_1).$$

Une stratification de l'ensemble  $S_F$  définie par  $\Xi$  est donnée par la filtration :

$$S_F = \{\alpha_1 = 0\} \cup \{\alpha_2 = 0\} \cup \{\alpha_3 = 0\} \supset 0\alpha_1 \cup 0\alpha_2 \cup 0\alpha_3 \supset \{0\} \supset \emptyset.$$

En fait :

sur la strate  $S_2^1 := \{\alpha_1 = 0\} \setminus (0\alpha_2 \cup 0\alpha_3)$ , la façon (3)[1, 2] correspond à la suite  $\left\{ \left( \frac{\alpha_3}{\alpha_2 k}, \frac{1}{k}, k\alpha_2 \right) \right\}$ ,

sur la strate  $S_2^2 := \{\alpha_2 = 0\} \setminus (0\alpha_1 \cup 0\alpha_3)$ , la façon (1)[2, 3] correspond à la suite  $\left\{ \left( \alpha_1 k, \frac{1}{k}, \frac{\alpha_3}{k\alpha_1} \right) \right\}$ ,

sur la strate  $S_2^3 := \{\alpha_3 = 0\} \setminus (0\alpha_1 \cup 0\alpha_2)$ , la façon (2)[1, 3] correspond à la suite  $\left\{ \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2 k}, \alpha_2 k, \frac{1}{k} \right) \right\}$ ,

sur la strate  $S_1^1 := 0\alpha_1 \setminus \{0\}$ , deux façons (1)[2, 3] et (2)[1, 3] correspondent aux suites  $\left\{ \left( k\alpha_1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k^2} \right) \right\}$  et  $\left\{ \left( \frac{1}{k}, \alpha_1 k, \frac{1}{k^2} \right) \right\}$ ,

sur la strate  $S_1^2 := 0\alpha_2 \setminus \{0\}$ , deux façons (3)[1, 2] et (2)[1, 3] correspondent aux suites  $\left\{ \left( \frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}, \alpha_2 k \right) \right\}$  et  $\left\{ \left( \frac{1}{k^2}, \alpha_2 k, \frac{1}{k} \right) \right\}$ ,

sur la strate  $S_1^3 := 0\alpha_3 \setminus \{0\}$ , deux façons (3)[1, 2] et (1)[2, 3] correspondent aux suites  $\left\{ \left( \frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}, \alpha_3 k \right) \right\}$  et  $\left\{ \left( \alpha_3 k, \frac{1}{k^2}, \frac{1}{k} \right) \right\}$ ,

sur la strate  $S_0 := \{0\}$ , trois façons (1)[2, 3], (2)[1, 3] et (3)[1, 2] correspondent aux suites  $\left\{ \left( k, \frac{1}{k^2}, \frac{1}{k^2} \right) \right\}$ ,  $\left\{ \left( \frac{1}{k^2}, k, \frac{1}{k^2} \right) \right\}$  et  $\left\{ \left( \frac{1}{k^2}, \frac{1}{k^2}, k \right) \right\}$ .

Prenons un point  $a_1 = (1, 1, 1) \in \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3 \setminus S_F$ , alors  $a_1 \in F(\mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3)$ . Cherchons maintenant une courbe  $\gamma_u^1 : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3$  et un point  $b = (0, \alpha_2, 0) \in 0\alpha_2$  tels que, d'une part,  $\gamma_u^1$  tende vers l'infini et  $F(\gamma_u^1)$  tende vers le point  $b$  lorsque  $u$  tend vers l'infini, et que, d'autre part,  $F(\gamma_1^1)$  soit le point  $a_1$ . Nous avons deux cas possibles :

*i)* ou bien  $\gamma_u^1$  tend vers l'infini avec la façon (3)[1, 2] : alors nous avons

$$\gamma_u^1 = \left( \frac{1}{\lambda^2 u^2}, \frac{1}{\mu u}, x_{3,u} \right), \quad \text{où } x_{3,u} \rightarrow \infty,$$

$$F(\gamma_u^1) = \left( \frac{1}{\lambda^2 \mu u^3}, \frac{1}{\mu u} x_{3,u}, \frac{1}{\lambda^2 u^2} x_{3,u} \right).$$

Puisque  $F(\gamma_u^1)$  tend vers  $b = (0, \alpha_2, 0)$ , alors

$$x_{3,u} = \mu u \alpha_2,$$

$$F(\gamma_u^1) = \left( \frac{1}{\lambda^2 \mu u^3}, \alpha_2, \frac{\mu \alpha_2}{\lambda^2 u} \right).$$

Puisque  $F(\gamma_1^1) = a_1 = (1, 1, 1)$ , nous pouvons choisir  $\lambda = \mu = 1$  et  $\alpha_2 = 1$ . Nous avons donc  $b = (0, 1, 0)$  et

$$F(\gamma_u^1) = \left( \frac{1}{u^3}, 1, \frac{1}{u} \right).$$

Prenons une courbe  $\gamma_u^j : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3$  telle que  $\gamma_u^j$  tende vers l'infini et  $F(\gamma_u^j)$  tende vers le point  $b = (0, 1, 0)$  avec la façon (3)[1, 2] lorsque  $u$  tend vers l'infini, pour  $j = 2, 3, \dots$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \gamma_u^j &= \left( \frac{1}{\lambda_j^2 u^2}, \frac{1}{\mu_j u}, \mu_j u \right), \\ F(\gamma_u^j) &= \left( \frac{1}{\lambda_j^2 \mu_j u^3}, 1, \frac{\mu_j}{\lambda_j^2 u} \right). \end{aligned}$$

Soit

$$a_j := F(\gamma_1^j).$$

Alors

$$a_j = \left( \frac{1}{\lambda_j^2 \mu_j}, 1, \frac{\mu_j}{\lambda_j^2} \right).$$

Pour que  $a_j$  tende vers un point  $a = (0, \alpha_2, \alpha_3)$  de la strate  $\{\alpha_1 = 0\} \setminus (0\alpha_2 \cup 0\alpha_3)$ ,  $\lambda_j$  doit tendre vers l'infini lorsque  $j$  tend vers l'infini et  $\mu_j = \lambda_j^2$ , pour  $j = 2, 3, \dots$ . Nous avons donc  $a = (0, 1, 1)$  et la suite  $\{a_j\}$  est  $\{(\frac{1}{j^4}, 1, 1)\}$  avec  $j = 1, 2, \dots$ .

*ii)* ou bien  $\gamma_u^1$  tend vers l'infini avec la façon (2)[1, 3] : pour distinguer de la courbe tendant vers l'infini avec la façon (3)[1, 2], nous notons  $\gamma_u'^1$  la courbe tendant vers l'infini avec la façon (2)[1, 3]. Nous avons

$$\begin{aligned} \gamma_u'^1 &= \left( \frac{1}{\lambda^2 u^2}, x_{2,u}, \frac{1}{\mu u} \right), \quad \text{où } x_{2,u} \rightarrow \infty, \\ F(\gamma_u'^1) &= \left( \frac{x_{2,u}}{\lambda^2 u^2}, \frac{x_{2,u}}{\mu u}, \frac{1}{\lambda^2 \mu u^3} \right). \end{aligned}$$

Puisque  $F(\gamma_u'^1)$  tend vers  $b = (0, 1, 0)$ , alors

$$\begin{aligned} x_{2,u} &= \mu u, \\ F(\gamma_u'^1) &= \left( \frac{\mu}{\lambda^2 u}, 1, \frac{1}{\lambda^2 \mu u^3} \right). \end{aligned}$$

Puisque  $F(\gamma_1^1) = a_1 = (1, 1, 1)$ , nous pouvons choisir  $\lambda = \mu = 1$ . Nous avons donc

$$F(\gamma_u'^1) = \left( \frac{1}{u}, 1, \frac{1}{u^3} \right).$$

Prenons une courbe  $\gamma'_u{}^j : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3$  telle que  $\gamma'_u{}^j$  tende vers l'infini et  $F(\gamma'_u{}^j)$  tende vers le point  $b = (0, 1, 0)$  avec la façon (2)[1, 3] lorsque  $u$  tend vers l'infini, pour  $j = 2, 3, \dots$ . Nous avons

$$\gamma'_u{}^j = \left( \frac{1}{\lambda_j^2 u^2}, \frac{1}{\mu_j u}, \mu_j u \right),$$

$$F(\gamma'_u{}^j) = \left( \frac{\mu_j}{\lambda_j^2 u}, 1, \frac{1}{\lambda_j^2 \mu_j u^3} \right).$$

Soit

$$a'_j := F(\gamma'_1{}^j).$$

Alors

$$a'_j = \left( \frac{\mu_j}{\lambda_j^2}, 1, \frac{1}{\lambda_j^2 \mu_j} \right).$$

Pour que  $a'_j$  tende vers le point  $a = (0, 1, 1)$ , nous pouvons supposer que  $\lambda_j$  tend vers l'infini lorsque  $j$  tend vers l'infini et  $\mu_j = \frac{1}{\lambda_j^2}$ , pour  $j = 2, 3, \dots$ . Nous avons donc

$$\{a'_j\} = \{a_j\} = \left\{ \left( \frac{1}{j^4}, 1, 1 \right) \right\}.$$

Nous pouvons choisir les voisinages tubulaires de la strate  $S_2^1 = 0\alpha_2$  et de la strate  $S_2^1 = \{\alpha_1 = 0\} \setminus 0\alpha_2 \cup 0\alpha_3$  comme les tubes  $T_1(\frac{1}{2})$  et  $T_2^1(\frac{1}{2})$  de rayon  $\frac{1}{2}$ . Sur  $T_2^1(\frac{1}{2})$ , nous prenons les courbes  $F(\gamma_u^j)$  et  $F(\gamma'_u{}^j)$ . Maintenant, sur le voisinage  $T_1^2(\frac{1}{2})$  de  $S_1^2$ , nous remplaçons  $T_1^2(\frac{1}{2})$  par le voisinage  $T_1^2(\frac{1}{4})$ . De plus, pour tout point  $b^* \in (0, b)$ , nous prenons comme voisinage un disque  $D(b^*, \varepsilon^*)$  tel que  $0 < \varepsilon^* < \frac{1}{4}$  et que d'une part  $\varepsilon^*$  tende vers 0 lorsque  $b^*$  tend vers l'origine 0, et d'autre part  $\varepsilon^*$  tende vers  $\frac{1}{4}$  lorsque  $b^*$  tend vers l'origine  $b$ . Nous obtenons un nouveau voisinage  $T_1'^2$  où les courbes sont définies par  $F(\gamma_u^1)$ ,  $F(\gamma'_u{}^1)$  et  $sF(\gamma_u^1) + (1-s)F(\gamma'_u{}^1)$  avec  $0 \leq s \leq 1$ . Pour l'origine 0, trois courbes tendent vers l'infini avec trois façons, donc nous avons trois courbes  $F(\gamma_u^1)$ ,  $F(\gamma'_u{}^1)$  et  $F(\gamma''_u{}^1)$  tendant vers 0. Le voisinage tubulaire de l'origine est la sphère  $(0, \frac{1}{4})$  où les courbes sont définies par  $F(\gamma_u^1)$ ,  $F(\gamma'_u{}^1)$ ,  $F(\gamma''_u{}^1)$  et

$$s_1 F(\gamma_u^1) + s_2 F(\gamma'_u{}^1) + (1 - s_1 - s_2) F(\gamma''_u{}^1),$$

où  $0 \leq s_1, s_2 \leq 1$ . Nous procédons de la même façon pour les autres strates de  $S_F$ . Les applications  $\pi_i$  et  $\rho_i$ , avec  $i = 1, 2, 3$  sont définies comme dans l'exemple 4.6.2. Avec cette construction, notre stratification est une stratification de Thom-Mather.

## 4.7 La stratification de $S_F$ , définie par $\Xi^*$ , est-elle une stratification de Whitney ?

**Proposition 4.7.1.** *Il existe une stratification de Whitney de  $S_F$  telle que l'ensemble des façons soit constant sur chaque strate.*

*Démonstration.* Par le théorème 2.3.2 de Jelonek [J1], l'ensemble  $S_F$  est un ensemble algébrique complexe. Par Whitney [Wh], il existe une stratification de Whitney de  $S_F$  que nous notons  $(\mathcal{S}')$ . Il existe donc une stratification de Whitney, notée  $(\mathcal{S}'')$ , plus fine que la stratification  $(\mathcal{S}')$  et que la stratification  $(\mathcal{S})$  de  $S_F$  définie par  $\Xi$ . Par la définition 4.2.17, page 78, l'ensemble des façons est constant sur chaque strate de  $(\mathcal{S})$ , donc est constant sur chaque strate de  $(\mathcal{S}'')$ .  $\square$

En fait, nous pouvons énoncer la conjecture suivante, vérifiée pour tous les exemples de ce travail :

**Conjecture 4.7.2.** *La stratification de l'ensemble de Jelonek  $S_F$  d'une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , définie par les façons, est une stratification de Whitney.*

Les façons peuvent être considérées comme des applications

$$\varphi : S_F \rightarrow \mathbb{Z}^n$$

comme suit. Soit  $\kappa = (I)[J] = (i_1, \dots, i_p)[j_1, \dots, j_q]$  une façon. Pour tout indice  $i \in \{0, \dots, n\}$ , nous notons

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in I \\ -1 & \text{si } i \in J \\ 0 & \text{si } i \notin I \cup J. \end{cases}$$

Pour tout point  $a \in S_F$ , nous définissons

$$\varphi_\kappa(a) = \begin{cases} (\varepsilon_1 1, \varepsilon_2 2, \dots, \varepsilon_n n) & \text{s'il existe une suite } \{\xi_k^a\} \text{ tendant vers l'infini, avec} \\ & \text{la façon } (I)[J] \text{ et telle que } F(\{\xi_k^a\}) \text{ tend vers } a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, dans l'exemple 4.2.20, page 79, et pour la façon  $\kappa = (3)[1]$ , nous avons  $\varphi_\kappa(a) = (-1, 0, 3)$  pour  $a \in S_{F1}$  et  $\varphi_\kappa(a) = (0, 0, 0)$  sinon.

Fixons un ordre sur l'ensemble des façons. Soit  $r$  le nombre de façons définies sur  $S_F$ , nous définissons alors  $\Phi : S_F \rightarrow \mathbb{Z}^{r \cdot n}$  par :

$$\Phi(a) = \{\varphi_\kappa(a) : \kappa \text{ est une façon de } S_F\}.$$

Nous remarquons que, pour montrer la conjecture 4.7.2, une étape importante est de montrer que les applications définies par les façons, et donc l'application  $\Phi$ , sont des applications constructibles.

Que la stratification de  $S_F$ , définie par  $\Xi^*$ , soit une stratification de Whitney, est une question. Nous pouvons penser à utiliser les courbes correspondantes aux façons pour le vérifier. Par exemple, l'idée d'une démonstration de la condition (a) de Whitney pourrait être la suivante :

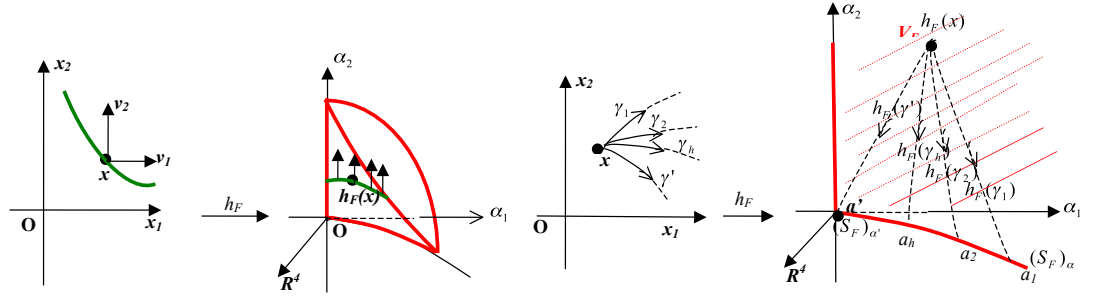


FIGURE 4.38 – Les suites de courbes considérées pour vérifier les conditions de Whitney de la stratification de  $S_F$ , définie par les façons

Si une strate  $(S_F)_\alpha$  contient  $(S_F)_{\alpha'}$  dans son adhérence, soient  $\kappa$  et  $\kappa'$  deux façons correspondantes telles que  $\kappa' < \kappa$ .

Notons  $a' \in (S_F)_{\alpha'}$  et une suite de points  $a_p$  de  $(S_F)_\alpha$  tendant vers  $a'$ . Nous passons par la partie lisse de  $V_F$ . Pour un point  $b$  de  $V_F$ , considérons des courbes  $\gamma_p$  dans  $\mathbb{C}_x^n$  tendant vers l'infini avec la façon  $\kappa$  et telles que leurs images  $h_F(\gamma_p)$  soient des courbes d'origine  $b$  et d'extrémité  $a_p$ . Les courbes  $\gamma_p$  ont pour limite une courbe  $\gamma'$  dont l'image  $h_F(\gamma')$  a pour origine  $b$  et pour extrémité le point  $a'$ , et correspondante à la façon  $\kappa'$ .

Si nous regardons les plans tangents aux points des courbes  $h_F(\gamma_p)$  et  $h_F(\gamma')$ , nous devons montrer :

$$\lim_{x \in \gamma_p, x \rightarrow \infty} T(V_F)_{h_F(x)} \supset T((S_F)_\alpha)_{a_p},$$

$$\lim_{y \in \gamma', y \rightarrow \infty} T(V_F)_{h_F(y)} \supset T((S_F)'_\alpha)_{a'}.$$

Nous conjecturons que la relation  $\kappa < \kappa'$  implique

$$\lim_{a_p \rightarrow a'} T((S_F)_\alpha)_{a_p} \supset T((S_F)_{\alpha'})_{a'}$$

et donc la condition (a) de Whitney.

## 4.8 Caractérisation des façons de l'ensemble de Jelonek correspondant aux applications polynomiales dominantes $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$

Dans les exemples ci-dessus, une strate de  $S_F$  de la plus grande dimension n'admet qu'une seule façon. Cela nous conduit à une question naturelle : *Est-ce que cette situation est générale ? Autrement dit, est-ce que sur une strate de la plus grande dimension de  $S_F$ , il n'y a qu'une seule façon ?*

En fait, la méthode des “façons” nous permet “d'envisager” le résultat suivant :

**Théorème 4.8.1.** *Considérons les applications polynomiales dominantes  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  de degré  $d$ . Pour chaque couple  $(n, d)$ , nous pouvons décrire la liste des ensembles de Jelonek  $S_F$  possibles, et pour chacun d'entre eux, nous pouvons expliciter une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  de degré  $d$  dont l'ensemble de Jelonek soit  $S_F$ .*

La démonstration de ce résultat, dans le cas général, suit un algorithme que nous développons ci-dessous, dans le cas  $(n, d) = (3, 2)$ . Nous démontrons le théorème dans ce cas. La démonstration générale suit le même schéma.

**Algorithme 4.8.2.** Soit  $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  une application polynomiale dominante de degré 2 telle que  $S_F$  n'est pas vide. Une façon  $\kappa$  de  $S_F$  appartient à l'un des six groupes de façons suivants :

- 1) groupe I :  $(1, 2, 3)$ ,
- 2) groupe II :  $(1, 2)$ ,  $(2, 3)$  et  $(3, 1)$ ,
- 3) groupe III :  $(1)$ ,  $(2)$  et  $(3)$ ,
- 4) groupe IV :  $(1, 2)[3]$ ,  $(1, 3)[2]$  et  $(2, 3)[1]$ ,
- 5) groupe V :  $(1)[2]$ ,  $(1)[3]$ ,  $(2)[1]$ ,  $[2](3)$ ,  $[3](1)$  et  $[3](2)$ ,
- 6) groupe VI :  $(1)[2, 3]$ ,  $(2)[1, 3]$  et  $(3)[1, 2]$ .

Supposons que toute strate de dimension 2 de  $S_F$  n'admette qu'une seule façon. Soit  $\{\xi_k\} = \{(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})\}$  une suite dans  $\mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3$  tendant vers l'infini et telle que  $F(\xi_k)$  tende vers un point d'une telle strate. Pour  $i = 1, 2, 3$ , les polynômes coordonnées  $F_i(\xi_k)$  ne tendent pas vers l'infini, mais certaines des coordonnées  $x_{i,k}$  tendent vers l'infini. Supposons que, par exemple,  $x_{1,k}$  et  $x_{2,k}$  tendent vers l'infini, alors  $F_i$  ne peut pas admettre l'une des coordonnées  $x_1$  ou  $x_2$ , seule, comme variables mais il peut admettre comme variables que nous appelons “pertinentes”  $(x_1 - x_2)$ ,  $(x_1 - x_2)x_1$  ou  $(x_1 - x_2)x_2$ .

En général, nous pourrions donc considérer  $F$  comme une application polynomiale des combinaisons de variables  $x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1, x_1 - x_2, (x_1 - x_2)x_1, (x_1 - x_2)x_2, (x_1 - x_2)x_3, x_1 - x_3, (x_1 - x_3)x_1, (x_1 - x_3)x_2, (x_1 - x_3)x_3, x_2 - x_3, (x_2 - x_3)x_1, (x_2 - x_3)x_2$  et  $(x_2 - x_3)x_3$ . Notons  $f_j$  ces variables.

Si comme nous l'avons supposé, toute strate de dimension 2 de  $S_F$  n'admet qu'une seule façon, alors, même en tenant compte des conditions imposées par cette façon, la forme des ensembles de Jelonek  $S_F$  possibles et des applications  $F$  correspondantes est assez compliquée et ceci est ce que nous étudierons d'une manière précise dans le chapitre 6.

Supposons maintenant qu'une strate de dimension 2 de  $S_F$  admette deux façons  $\kappa$  et  $\kappa'$ . Alors, le nombre de variables "pertinentes" va être réduit, grâce aux conditions imposées par les façons  $\kappa$  et  $\kappa'$ . Nous procédons pour cette étude aux deux étapes suivantes :

**Étape 1 :** Déterminer, en fonction des façons  $\kappa$  et  $\kappa'$ , quelles sont les variables pertinentes dans  $F$  ainsi que les suites  $\{\xi_k\}$  pour  $\kappa$  et  $\{\xi'_k\}$  pour  $\kappa'$ , pour que la strate correspondant à ces façons soit de plus grande dimension possible.

**Étape 2 :** Déterminer la forme précise de  $F$  en tenant compte des contraintes suivantes :

- les deux façons doivent correspondre à la même strate. Ceci implique que les valeurs asymptotiques de  $F(\xi_k)$  et  $F(\xi'_k)$  doivent coïncider : Supposons que  $\{\xi_k\} = \{(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})\}$  et  $\{\xi'_k\} = \{(x'_{1,k}, x'_{2,k}, x'_{3,k})\}$  soient deux suites correspondant respectivement aux façons  $\kappa$  et  $\kappa'$ . Pour que  $\kappa$  et  $\kappa'$  soient deux façons de la même strate de dimension 2 de  $S_F$ , alors  $F(\xi_k)$  et  $F(\xi'_k)$  doivent admettre au moins les mêmes deux coordonnées tendant indépendamment vers deux nombres complexes quelconques,

- l'application  $F$  est dominante. Ceci implique deux conditions :

- + les suites  $\{F(\xi_k)\}$  et  $\{F(\xi'_k)\}$  doivent admettre au moins une même coordonnée tendant vers 0,

- + les polynômes coordonnées  $F_1, F_2$  et  $F_3$  doivent être indépendants (proposition 1.2.12, page 29), cela signifie que  $F$  dépend au moins de 3 variables parmi les  $f_j$  ci-dessus, convenablement choisies. Ainsi nous dirons parfois que

" $F$  est une application polynomiale qui s'écrit sous la forme  $F = \tilde{F}(f_1, \dots, f_k)$  où  $k \geq 3$  telle que les coefficients de  $f_j$  sont non nuls pour certains  $j \in \{1, \dots, k\}$ ".

Les deux exemples suivants sont très instructifs pour la preuve du théorème 4.8.1 :

**Exemple 4.8.3.** Explicitons une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  de degré 2 telle qu'il existe une strate de dimension 2 de  $S_F$  admettant les deux façons  $\kappa = (1)[2, 3]$  et  $\kappa' = (2)[1, 3]$  : Supposons que  $\{\xi_k\} = \{(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})\}$  et  $\{\xi'_k\} = \{(x'_{1,k}, x'_{2,k}, x'_{3,k})\}$  soient deux suites correspondant respectivement aux façons  $\kappa$  et  $\kappa'$ .



**Étape 1** : Puisque  $\kappa = (1)[2, 3]$ , la variable  $x_{1,k}$  tend vers l'infini et  $F$  s'écrit sous la forme :

$$F = \tilde{F}(x_2, x_3, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1, (x_1 - x_2)x_2, (x_1 - x_2)x_3, (x_2 - x_3), \\ (x_2 - x_3)x_1, (x_2 - x_3)x_2, (x_2 - x_3)x_3, (x_1 - x_3)x_2, (x_1 - x_3)x_3).$$

Puisque  $\kappa' = (2)[1, 3]$ , alors  $x_{2,k}$  tend vers l'infini et  $F$  s'écrit sous la forme :

$$F = \tilde{F}(x_1, x_3, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1, (x_1 - x_2)x_1, (x_1 - x_2)x_3, (x_2 - x_3)x_1, \\ (x_2 - x_3)x_3, x_1 - x_3, (x_1 - x_3)x_1, (x_1 - x_3)x_2, (x_1 - x_3)x_3).$$

Nous en déduisons que  $F$  s'écrit sous la forme

$$F = \tilde{F}(x_3, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1, (x_1 - x_2)x_3, (x_2 - x_3)x_1, (x_2 - x_3)x_3, \\ (x_1 - x_3)x_2, (x_1 - x_3)x_3).$$

Puisque  $(x_1 - x_2)x_3$ ,  $(x_2 - x_3)x_1$ ,  $(x_2 - x_3)x_3$ ,  $(x_1 - x_3)x_2$  et  $(x_1 - x_3)x_3$  sont des polynômes des variables  $x_3$ ,  $x_1x_2$ ,  $x_2x_3$  et  $x_3x_1$  nous pouvons donc simplifier  $F$  sous la forme :

$$F = \tilde{F}(x_3, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1).$$

Nous pouvons en effet simplifier l'application  $F$  en enlevant des variables  $f_j$  qui sont des polynômes en des variables qui apparaissent déjà dans  $\tilde{F}$ . Par contre, nous ne pouvons pas faire l'inverse, puisqu'avec une suite tendant vers l'infini, si un polynôme de certaines variables ne tend pas vers l'infini (par exemple  $x_1 - x_2$ ), alors une variable de ce polynôme (par exemple  $x_1$ ) peut tendre vers l'infini.

Pour que  $\kappa$  et  $\kappa'$  soient deux façons d'une strate de plus grande dimension possible, nous devons choisir la suite  $\xi_k$  telle que  $x_{1,k}x_{2,k}$  et  $x_{1,k}x_{3,k}$  tendent vers des nombres complexes quelconques ; de la même manière, nous devons choisir la suite  $\xi'_k$  telle que  $x'_{1,k}x'_{2,k}$  et  $x'_{2,k}x'_{3,k}$  tendent vers des nombres complexes quelconques. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $\xi_k = (k + \frac{\lambda}{k}, \frac{\mu}{k}, \frac{\nu}{k})$  et  $\xi'_k = (\frac{\lambda'}{k}, k + \frac{\mu'}{k}, \frac{\nu'}{k})$ , nous avons :

$$\begin{aligned} F(\xi_k) &\rightarrow \tilde{F}(0, \mu, 0, \nu), \\ F(\xi'_k) &\rightarrow \tilde{F}(0, \lambda', \mu', 0). \end{aligned}$$

**Étape 2** : Pour que  $\kappa$  et  $\kappa'$  sont deux façons d'une strate de dimension 2 de  $S_F$ , nous devons garder les variables

$$f_1 := x_3 \quad \text{et} \quad f_2 := x_1x_2$$

de  $F$  puisque  $f_1(\xi_k)$ ,  $f_1(\xi'_k)$  tendent vers 0 et  $f_2(\xi_k)$ ,  $f_2(\xi'_k)$  tendent vers des nombres complexes quelconques  $\mu$ ,  $\lambda'$ , respectivement. Nous devons créer maintenant la troisième variable  $f_3$  telle que  $f_3(\xi_k)$  tend vers un nombre complexe quelconque indépendamment de  $\mu$  et  $f_3(\xi'_k)$  tend vers un nombre complexe quelconque indépendamment

de  $\lambda'$ . Nous avons une seule possibilité

$$F = \tilde{F}(x_3, x_1x_2, r_1x_2x_3 + r_2x_3x_1),$$

où  $r_1$  et  $r_2$  sont des nombres complexes non nuls. Nous mettons ici les coefficients  $r_1$  et  $r_2$  pour montrer qu'il n'est pas nécessaire que les coefficients de  $x_2x_3$  et  $x_3x_1$  soient les mêmes.

Donc, nous arrivons à la conclusion : si une strate de dimension 2 de l'ensemble de Jelonek  $S_F$  d'une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  de degré 2 admet deux façons (1)[2, 3] et (2)[1, 3], alors  $F$  s'écrit sous la forme :

$$F = \tilde{F}(x_3, x_1x_2, r_1x_2x_3 + r_2x_3x_1).$$

Par ailleurs, avec cette forme de  $F$ , alors  $S_F$  n'admet que deux façons (1)[2, 3] et (2)[1, 3]. Cela montre que  $S_F$  est irréductible.

**Exemple 4.8.4.** Explicitons une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  de degré 2 telle qu'une strate de dimension 2 de  $S_F$  admette les deux façons  $\kappa = (1, 2, 3)$  et  $\kappa' = (1, 2)[3]$  : Supposons que  $\{\xi_k\} = \{(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})\}$  et  $\{\xi'_k\} = \{(x'_{1,k}, x'_{2,k}, x'_{3,k})\}$  soient deux suites correspondant respectivement aux façons  $\kappa$  et  $\kappa'$ .

**Étape 1 :** Avec la façon  $\kappa$ , la suite  $x_{1,k} - x_{2,k}$  tend ou bien vers un nombre complexe  $\lambda$  quelconque, ou bien vers 0. Si  $x_{1,k} - x_{2,k}$  tend vers un nombre complexe  $\lambda$ , alors pour que  $F$  soit dominante,  $F$  doit être de la forme

$$F = \tilde{F}(x_1 - x_2, (x_1 - x_3)x_3, (x_2 - x_3)x_3)$$

telle que  $x_{1,k} - x_{3,k}$  et  $x_{2,k} - x_{3,k}$  tendent vers 0. Cela implique que  $x_{1,k} - x_{2,k}$  tend vers 0, d'où la contradiction. Alors  $x_{1,k} - x_{2,k}$  tend vers 0 et  $F$  est de la forme :

$$F = \tilde{F}(x_1 - x_2, (x_1 - x_2)x_1, (x_1 - x_2)x_2, (x_1 - x_2)x_3),$$

ou bien

$$F = \tilde{F}(x_1 - x_2, (x_1 - x_2)x_1, (x_1 - x_2)x_2, (x_1 - x_2)x_3, (x_1 - x_3)x_3, (x_2 - x_3)x_3).$$

Si  $F = \tilde{F}(x_1 - x_2, (x_1 - x_2)x_1, (x_1 - x_2)x_2, (x_1 - x_2)x_3)$ , alors avec la façon  $\kappa'$ , la suite  $x'_{1,k} - x'_{2,k}$  doit tendre vers 0, sinon  $F = \tilde{F}(x_1 - x_2, (x_1 - x_2)x_3)$ , d'où la contradiction avec  $F$  dominante. Cela implique que  $(x'_{1,k} - x'_{2,k})x'_{3,k}$  tend vers 0,  $(x'_{1,k} - x'_{2,k})x'_{1,k}$  et  $(x'_{1,k} - x'_{2,k})x'_{2,k}$  tendent vers un même nombre complexe. La façon  $\kappa'$  correspond à une strate de dimension 1, ce cas est donc exclus. Alors  $F$  est de la forme :

$$F = \tilde{F}(x_1 - x_2, (x_1 - x_2)x_1, (x_1 - x_2)x_2, (x_1 - x_2)x_3, (x_1 - x_3)x_3, (x_2 - x_3)x_3), \quad (4.8.5)$$

où :

+ Avec la façon  $\kappa$ , les suites  $x_{1,k} - x_{2,k}$ ,  $x_{1,k} - x_{3,k}$  et  $x_{2,k} - x_{3,k}$  tendent vers 0. Les suites coordonnées  $(x_{1,k} - x_{2,k})x_{1,k}$ ,  $(x_{1,k} - x_{2,k})x_{2,k}$  et  $(x_{1,k} - x_{2,k})x_{3,k}$  tendent vers un même nombre complexe quelconque  $\lambda$ . La suite coordonnée  $(x_{1,k} - x_{3,k})x_{3,k}$  tend vers un nombre complexe quelconque  $\mu$ . La suite coordonnée  $(x_{2,k} - x_{3,k})x_{3,k}$  tend vers le nombre complexe  $\mu - \lambda$ .

+ Avec la façon  $\kappa'$ , la suite  $x'_{1,k} - x'_{2,k}$  tend vers 0. La suite coordonnée  $(x'_{1,k} - x'_{2,k})x'_{3,k}$  tend donc vers 0. Les suites coordonnées  $(x'_{1,k} - x'_{2,k})x'_{1,k}$  et  $(x'_{1,k} - x'_{2,k})x'_{2,k}$  tendent vers un même nombre complexe quelconque  $\lambda'$ . Les suites coordonnées  $(x'_{1,k} - x'_{3,k})x'_{3,k}$  et  $(x'_{2,k} - x'_{3,k})x'_{3,k}$  tendent vers un même nombre complexe quelconque  $\mu'$ .

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} F(\xi_k) &\rightarrow \tilde{F}(0, \lambda, \lambda, \lambda, \mu, \mu - \lambda), \\ F(\xi'_k) &\rightarrow \tilde{F}(0, \lambda', \lambda', 0, \mu', \mu'). \end{aligned}$$

**Étape 2 :** Pour que  $\kappa$  et  $\kappa'$  soient deux façons d'une même strate de dimension 2 de  $S_F$ , alors :

- a) le coefficient de  $x_1 - x_2$  est non nul,
- b) au moins l'un des coefficients de  $(x_1 - x_2)x_1$  et  $(x_1 - x_2)x_2$  est non nul,
- c) au moins l'un des coefficients de  $(x_1 - x_3)x_3$  et  $(x_2 - x_3)x_3$  est non nul.

Nous prouvons maintenant que l'ensemble de Jelonek  $S_F$  d'une application  $F$  de la forme (4.8.5) n'admet que deux façons  $\kappa = (1, 2, 3)$  et  $\kappa' = (1, 2)[3]$  et est irréductible. Appelons  $\mathcal{S}$  l'hypersurface irréductible contenant deux façons  $\kappa$  et  $\kappa'$ . Prenons une façon  $\kappa^*$  de  $S_F$  et notons  $\{\xi_k^*\} = (x_{1,k}^*, x_{2,k}^*, x_{3,k}^*)$  la suite correspondante. Par la condition a) ci-dessus,  $F$  doit admettre toujours  $x_1 - x_2$  comme variable, et  $x_{1,k}^* - x_{2,k}^*$  doit tendre ou bien vers un nombre complexe  $\lambda$  ou bien vers 0. Supposons que  $x_{1,k}^* - x_{2,k}^*$  tende vers un nombre complexe  $\lambda$ . Par la condition b) ci-dessus, les deux suites  $x_{1,k}^*$  et  $x_{2,k}^*$  ne peuvent pas tendre vers l'infini, donc  $x_{3,k}^*$  doit tendre vers l'infini. Nous avons donc ou bien  $(x_{1,k}^* - x_{3,k}^*)x_{3,k}^*$  tend vers l'infini ou bien  $(x_{2,k}^* - x_{3,k}^*)x_{3,k}^*$  tend vers l'infini, d'où la contradiction avec la condition c) ci-dessus. Donc  $x_{1,k}^* - x_{2,k}^*$  tend vers 0. Par le même argument, le cas où  $x_{1,k}^*$  et  $x_{2,k}^*$  ne tendent pas vers l'infini est en contradiction avec la condition c) et alors  $x_{1,k}^*$  et  $x_{2,k}^*$  doivent tendre vers l'infini. Par la condition c),  $x_{3,k}^*$  tend ou bien vers 0, ou bien vers l'infini. La façon  $\kappa^*$  est donc ou bien  $(1, 2, 3)$  ou bien  $(1, 2)[3]$ . Alors  $S_F$  n'admet que deux façons  $\kappa$  et  $\kappa'$ , cela signifie que  $S_F$  est l'hypersurface irréductible  $\mathcal{S}$ .

**Remarque 4.8.6.** Notons  $f_j$  les variables "pertinentes" de l'application polynomiale

$$F = \tilde{F}(x_1 - x_2, (x_1 - x_2)x_1, (x_1 - x_2)x_2, (x_1 - x_2)x_3, (x_1 - x_3)x_3, (x_2 - x_3)x_3),$$

dans l'exemple 4.8.4 ci-dessus, comme suit :

$$f_1 = x_1 - x_2, \quad f_2 = (x_1 - x_2)x_1, \quad f_3 = (x_1 - x_2)x_2,$$

$$f_4 = (x_1 - x_2)x_3, \quad f_5 = (x_1 - x_3)x_3, \quad f_6 = (x_2 - x_3)x_3.$$

Nous voyons que  $f_6 = f_5 - f_4$ . Donc les variables  $f_4$ ,  $f_5$  et  $f_6$  sont dépendantes en ce sens qu'elles jouent le même rôle. Alors, nous pouvons écrire  $F$  sous la forme :  
ou bien

$$F = \tilde{F}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5),$$

ou bien

$$F = \tilde{F}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_6),$$

ou bien

$$F = \tilde{F}(f_1, f_2, f_3, f_5, f_6).$$

Dans ce cas, pour simplicier, nous écrivons

$$F = \tilde{F}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$$

comme dans l'exemple 4.8.4 et nous comprenons que  $F$  est une application polynomiale d'au moins 3 variables parmi les  $f_j$ ,  $j = 1, \dots, 6$  ci-dessus, avec un bon choix pour que  $F$  soit dominante.

**Remarque 4.8.7.** Dans l'étape 1 de l'exemple 4.8.4, nous devons déjà penser à la condition de dominance de l'application  $F$ .

De la remarque 4.8.1 et de l'exemple 4.8.3 ci-dessus, nous pouvons procéder à la preuve du théorème suivant, lequel est le cas particulier du théorème 4.8.1 pour le cas  $(n, d) = (3, 2)$  :

**Théorème 4.8.8.** Soit  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  une application polynomiale dominante de degré 2 telle que  $S_F$  n'est pas vide. Alors, pour chaque point  $a$  d'une hypersurface irréductible de dimension 2 de  $S_F$ , nous avons  $1 \leq \text{or}(a) \leq 2$ . De plus, si  $\text{or}(a) = 2$ , alors  $S_F$  est irréductible et  $S_F$  n'admet que deux façons parmi les cas suivants :

(i)  $\kappa = (1, 2, 3)$  et  $\kappa' = (i_1, i_2)[j]$  avec  $\{(i_1, i_2, j)\} = \{(1, 2, 3)\}$ . Alors,  $F$  s'écrit sous la forme

$$F = \tilde{F}(x_{i_1} - x_{i_2}, (x_{i_1} - x_{i_2})x_{i_1}, (x_{i_1} - x_{i_2})x_{i_2}, (x_{i_1} - x_{i_2})x_j, (x_{i_1} - x_j)x_j, (x_{i_2} - x_j)x_j),$$

où

- a) le coefficient de  $x_{i_1} - x_{i_2}$  est non nul,
- b) au moins l'un des coefficients de  $(x_{i_1} - x_{i_2})x_{i_1}$  et  $(x_{i_1} - x_{i_2})x_{i_2}$  est non nul,
- c) au moins l'un des coefficients de  $(x_{i_1} - x_j)x_j$  et  $(x_{i_2} - x_j)x_j$  est non nul.

(ii)  $\kappa = (1, 2, 3)$  et  $\kappa' = (i)[j_1, j_2]$  où  $\{(i, j_1, j_2)\} = \{(1, 2, 3)\}$ . Alors,  $F$  s'écrit sous la forme

$$F = \tilde{F}((x_i - x_{j_1})x_{j_1}, (x_i - x_{j_1})x_{j_2}, (x_i - x_{j_2})x_{j_1}, (x_i - x_{j_2})x_{j_2}, (x_{j_1} - x_{j_2}), (x_{j_1} - x_{j_2})x_i, (x_{j_1} - x_{j_2})x_{j_1}, (x_{j_1} - x_{j_2})x_{j_2}),$$

où le coefficient de  $x_{j_1} - x_{j_2}$  est non nul et

- a) ou bien le coefficient de  $(x_{j_1} - x_{j_2})x_i$  est non nul et au moins l'un des quatre coefficients de  $(x_i - x_{j_1})x_{j_1}$ ,  $(x_i - x_{j_1})x_{j_2}$ ,  $(x_i - x_{j_2})x_{j_1}$  et  $(x_i - x_{j_2})x_{j_2}$  est non nul,
- b) ou bien les coefficients de  $(x_i - x_{j_1})x_{j_1}$  et  $(x_i - x_{j_2})x_{j_2}$  sont non nuls,
- c) ou bien les coefficients de  $(x_i - x_{j_1})x_{j_2}$  et  $(x_i - x_{j_2})x_{j_1}$  sont non nuls.

(iii)  $\kappa = (1, 2)[3]$  et  $\kappa' = (i)[3, j]$ , où  $\{(i, j) = \{(1, 2)\}$ . Alors,  $F$  s'écrit sous la forme

$$F = \tilde{F}(x_3, x_j x_3, x_i x_3, (x_i - x_j)x_j),$$

où les coefficients de  $x_3$ ,  $x_i x_3$  et  $(x_i - x_j)x_j$  sont non nuls.

(iv)  $\kappa = (1, 2)[3]$  et  $\kappa' = (3)[1, 2]$  :  $F$  s'écrit sous la forme

$$F = \tilde{F}(x_1 x_3, x_2 x_3, x_1 - x_2, r_1 x_1 x_3 + r_2 x_2 x_3 + r_3(x_1 - x_2)x_1 + r_4(x_1 - x_2)x_2),$$

où

- a)  $r_l \in \mathbb{C}$  avec  $l = 1, \dots, 4$  tels que ou bien  $(r_1 \neq 0, r_2 \neq 0, (r_3, r_4) \neq (0, 0))$ , ou bien  $((r_1, r_2) \neq (0, 0), (r_3, r_4) \neq (0, 0))$ ,
- b) au moins l'un des coefficients de  $x_1 x_3$  et  $x_2 x_3$  est non nul,
- c) les coefficients de  $x_1 - x_2$  et  $r_1 x_1 x_3 + r_2 x_2 x_3 + r_3(x_1 - x_2)x_1 + r_4(x_1 - x_2)x_2$  sont non nuls.

(v)  $\kappa = (1, 3)[2]$  et  $\kappa' = (i)[2, j]$  où  $\{i, j\} = \{1, 3\}$  :  $F$  s'écrit sous la forme

$$F = \tilde{F}(x_2, x_2 x_j, x_i x_2, (x_i - x_j)x_j),$$

où les coefficients de  $x_2$ ,  $x_2 x_i$  et  $(x_i - x_j)x_j$  sont non nuls.

(vi)  $\kappa = (1, 3)[2]$  et  $\kappa' = (2)[1, 3]$  :  $F$  s'écrit sous la forme

$$F = \tilde{F}(x_1 x_2, x_2 x_3, x_1 - x_3, r_1 x_1 x_2 + r_2 x_2 x_3 + r_3(x_1 - x_3)x_1 + r_4(x_1 - x_3)x_3),$$

où

- a)  $r_l \in \mathbb{C}$  avec  $l = 1, \dots, 4$  tels que ou bien  $(r_1 \neq 0, r_2 \neq 0)$ , ou bien  $(r_1, r_2) \neq (0, 0)$  et  $(r_3, r_4) \neq (0, 0)$ ,
- b) au moins l'un des deux coefficients  $x_1 x_2$  et  $x_2 x_3$  est non nul,
- c) les coefficients de  $x_1 - x_3$  et  $r_1 x_1 x_2 + r_2 x_2 x_3 + r_3(x_1 - x_3)x_1 + r_4(x_1 - x_3)x_3$  sont non nuls.

(vii)  $\kappa = (2, 3)[1]$  et  $\kappa' = (i)[1, j]$ , où  $\{i, j\} = \{2, 3\}$  :  $F$  s'écrit sous la forme

$$F = \tilde{F}(x_1, x_1 x_i, x_1 x_j, (x_i - x_j)x_j),$$

où les coefficients de  $x_1$ ,  $x_1 x_i$  et  $(x_i - x_j)x_j$  sont non nuls.

(viii)  $\kappa = (2, 3)[1]$  et  $\kappa' = (1)[2, 3]$  :  $F$  s'écrit sous la forme

$$F = \tilde{F}(x_1x_3, x_1x_2, x_3 - x_2, r_1x_1x_3 + r_2x_1x_2 + r_3(x_3 - x_2)x_3 + r_4(x_3 - x_2)x_2),$$

où

a)  $r_l \in \mathbb{C}$  avec  $l = 1, \dots, 4$  tels que ou bien  $(r_1 \neq 0, r_2 \neq 0, (r_3, r_4) \neq (0, 0))$ , ou bien  $((r_1, r_2) \neq (0, 0), (r_3, r_4) \neq (0, 0))$ ,

b) au moins l'un des coefficients de  $x_1x_3$  et  $x_1x_2$  est non nul,

c) les coefficients de  $x_3 - x_2$  et  $r_1x_1x_3 + r_2x_1x_2 + r_3(x_3 - x_2)x_3 + r_4(x_3 - x_2)x_2$  sont non nuls.

(ix)  $\kappa = (1)[2, 3]$  et  $\kappa' = (i)[1, j]$ , avec  $\{(i, j) = \{(2, 3)\}$ . Alors  $F$  s'écrit sous la forme

$$F = \tilde{F}(x_j, x_1x_i, r_1x_ix_j + r_2x_1x_j),$$

où  $r_1$  et  $r_2$  sont des nombres complexes non nuls et les coefficients de  $x_j$ ,  $x_1x_i$  et  $r_1x_ix_j + r_2x_1x_j$  sont non nuls.

*Démonstration.* Supposons qu'il existe une strate de dimension 2 de  $S_F$  admettant deux façons  $\kappa$  et  $\kappa'$ . Ces façons appartiennent à un ou deux groupes parmi les six groupes de la l'algorithme 4.8.2 ci-dessus, nous avons donc les cas possibles suivants :

1)  $\kappa = (1, 2, 3)$  et  $\kappa'$  appartient au groupe II, par exemple  $\kappa' = (1, 2)$  : Pour que  $\kappa$  et  $\kappa'$  soient deux façons d'une strate de dimension la plus grande possible alors  $F$  est une application polynomiale de la forme

$$F = \tilde{F}(x_1 - x_2, (x_1 - x_2)x_1, (x_1 - x_2)x_2, (x_1 - x_2)x_3),$$

telle que pour la façon  $\kappa'$ , la suite  $x'_{1,k} - x'_{2,k}$  tend vers 0 et les suites  $(x'_{1,k} - x'_{2,k})x'_{1,k}$ ,  $(x'_{1,k} - x'_{2,k})x'_{2,k}$  tendent vers le même nombre complexe quelconque  $\lambda$ . Nous avons donc

$$F(\xi'_k) \rightarrow \tilde{F}(0, \lambda, \lambda, 0).$$

Alors  $\kappa'$  est une façon d'une strate de dimension 1 de  $S_F$ , ce cas est donc exclus.

De la même manière, nous obtenons le même résultat pour les autres façons  $\kappa'$  du groupe II.

2)  $\kappa = (1, 2, 3)$  et  $\kappa'$  appartient au groupe III, par exemple  $\kappa' = (1)$  :  $F$  est une application polynomiale de la forme

$$F = \tilde{F}(x_2 - x_3, (x_2 - x_3)x_1, (x_2 - x_3)x_2, (x_2 - x_3)x_3),$$

telle que pour la façon  $\kappa'$ , la suite  $(x'_{2,k} - x'_{3,k})$  tend vers 0. Donc  $(x'_{2,k} - x'_{3,k})x'_{2,k}$  et  $(x'_{2,k} - x'_{3,k})x'_{3,k}$  tendent aussi vers 0. La façon  $\kappa'$  est une façon d'une strate de dimension plus petite que 2 de  $S_F$ , ce cas est donc exclus.

De la même manière, nous obtenons le même résultat pour les autres façons  $\kappa'$  du groupe III.

3)  $\kappa = (1, 2, 3)$  et  $\kappa'$  appartient au groupe IV : Si  $\kappa' = (1, 2)[3]$ , de l'exemple 4.8.4,  $F$  est une application polynomiale de la forme

$$F = \tilde{F}(x_1 - x_2, (x_1 - x_2)x_1, (x_1 - x_2)x_2, (x_1 - x_2)x_3, (x_1 - x_3)x_3, (x_2 - x_3)x_3), \quad (4.8.9)$$

où

- a) le coefficient de  $x_1 - x_2$  est non nul,
- b) au moins l'un des coefficients de  $(x_1 - x_2)x_1$  et  $(x_1 - x_2)x_2$  est non nul,
- c) au moins l'un des coefficients de  $(x_1 - x_3)x_3$  et  $(x_2 - x_3)x_3$  est non nul.

Dans l'exemple 4.8.4 et dans ce cas,  $S_F$  est irréductible.

Procédons de la même manière, nous obtenons un résultat identique pour les façons  $\kappa' = (1, 3)[2]$  et  $\kappa' = (2, 3)[1]$  en échangeant le rôle des variables  $x_1, x_2$  et  $x_3$ . C'est le cas (i) de notre théorème.

4)  $\kappa = (1, 2, 3)$  et  $\kappa'$  appartient au groupe V, par exemple  $\kappa' = (1)[2]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_2 - x_3, (x_2 - x_3)x_2, (x_2 - x_3)x_3, (x_1 - x_2)x_2, (x_1 - x_3)x_2),$$

telle que :

+ Avec la façon  $\kappa$ , les suites  $x_{1,k} - x_{2,k}$ ,  $x_{1,k} - x_{3,k}$  et  $x_{2,k} - x_{3,k}$  tendent vers 0. Les suites coordonnées  $(x_{2,k} - x_{3,k})x_{2,k}$  et  $(x_{2,k} - x_{3,k})x_{3,k}$  tendent donc vers un même nombre complexe quelconque  $\lambda$ . La suite coordonnée  $(x_{1,k} - x_{2,k})x_{2,k}$  tend vers un nombre complexe quelconque  $\mu$ . La suite coordonnée  $(x_{1,k} - x_{3,k})x_{2,k}$  tend vers un nombre complexe  $\mu + \lambda$ .

+ Avec la façon  $\kappa'$ , la suite  $x'_{2,k} - x'_{3,k}$  tend vers un nombre complexe quelconque  $\lambda'$ , la suite coordonnée  $(x'_{2,k} - x'_{3,k})x'_{3,k}$  tend donc vers  $\lambda'^2$ . La suite coordonnée  $(x'_{2,k} - x'_{3,k})x'_{2,k}$  tend vers 0. Les suites coordonnées  $(x'_{1,k} - x'_{2,k})x'_{2,k}$  et  $(x'_{1,k} - x'_{3,k})x'_{2,k}$  tendent vers un même nombre complexe quelconque  $\mu'$ .

Nous avons donc

$$\begin{aligned} F(\xi_k) &\rightarrow \tilde{F}(0, \lambda, \lambda, \mu, \lambda + \mu), \\ F(\xi'_k) &\rightarrow \tilde{F}(-\lambda', 0, -\lambda'^2, \mu', \mu'). \end{aligned}$$

Alors  $\kappa$  et  $\kappa'$  sont deux façons de deux strates différentes, ce cas est donc exclus.

Nous avons le même résultat pour les autres façons  $\kappa'$  du groupe V.

Dans les cas précédents, nous n'avons pas explicité les suites  $\xi_k$  et  $\xi'_k$  satisfaisant les façons pour que  $\kappa$  et  $\kappa'$  pour qu'elles soient deux façons d'une strate de dimension la plus grande possible. En revanche, pour être plus complets, dans les cas suivants,

nous explicitons les suites  $\xi_k$  et  $\xi'_k$  choisies comme représentants de deux classes de suites correspondant aux deux façons  $\kappa$ ,  $\kappa'$  telles que ces deux façons soient les façons d'une strate de dimension la plus grande possible.

5)  $\kappa = (1, 2, 3)$  et  $\kappa'$  appartient au groupe VI : si  $\kappa' = (1)[2, 3]$ ,  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}((x_1 - x_2)x_2, (x_1 - x_2)x_3, (x_1 - x_3)x_2, (x_1 - x_3)x_3, (x_2 - x_3), (x_2 - x_3)x_1, (x_2 - x_3)x_2, (x_2 - x_3)x_3). \quad (4.8.9)$$

Choisissons, par exemple,  $\xi_k = (k + \frac{\lambda}{k}, k + \frac{\mu}{k}, k + \frac{\nu}{k})$  et  $\xi'_k = (k, \frac{\mu'}{k}, \frac{\nu'}{k})$ , nous avons :

$$\begin{aligned} F(\xi_k) &\rightarrow \tilde{F}(\lambda - \mu, \lambda - \mu, \lambda - \nu, \lambda - \nu, 0, \mu - \nu, \mu - \nu, \mu - \nu), \\ F(\xi'_k) &\rightarrow \tilde{F}(\mu', \nu', \mu', \nu', 0, \mu' - \nu', 0, 0). \end{aligned}$$

Pour que  $\kappa$  et  $\kappa'$  soient deux façons d'une strate de dimension 2 de  $S_F$ , alors le coefficient de  $x_2 - x_3$  doit être non nul et

- a) ou bien le coefficient de  $(x_2 - x_3)x_1$  est non nul et au moins l'un des quatre coefficients de  $(x_1 - x_2)x_2$ ,  $(x_1 - x_2)x_3$ ,  $(x_1 - x_3)x_2$  et  $(x_1 - x_3)x_3$  est non nul,
- b) ou bien les coefficients de  $(x_1 - x_2)x_2$  et  $(x_1 - x_3)x_3$  sont non nuls,
- c) ou bien les coefficients de  $(x_1 - x_2)x_3$  et  $(x_1 - x_3)x_2$  sont non nuls.

Procédant de la même manière, nous obtenons un résultat identique pour les façons  $\kappa' = (2)[1, 3]$  et  $\kappa' = (3)[1, 2]$  en échangeant le rôle des variables  $x_1, x_2$  et  $x_3$ . C'est le cas (ii) de notre théorème.

6)  $\kappa$  appartient au groupe II, par exemple  $\kappa = (1, 2)$ , et  $\kappa'$  appartient aussi au groupe II, par exemple,  $\kappa' = (2, 3)$ , alors  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}((x_1 - x_2)(x_2 - x_3)),$$

d'où la contradiction avec  $F$  est dominante. Ce cas est donc exclus.

Procédant de la même manière, nous obtenons le même résultat avec les autres choix de façons  $\kappa$  et  $\kappa'$  dans le groupe II.

7)  $\kappa$  appartient au groupe II, par exemple  $\kappa = (1, 2)$ , et  $\kappa'$  appartient au groupe III :

- i) Si  $\kappa' = (1)$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_3, (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)),$$

d'où la contradiction avec  $F$  est dominante. Ce cas est donc exclus.

Nous avons le même résultat avec  $\kappa' = (2)$ .



ii) Si  $\kappa' = (3)$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_1 - x_2, (x_1 - x_2)x_1, (x_1 - x_2)x_2, (x_1 - x_2)x_3).$$

Choisissons, par exemple,  $\xi_k = (k + \frac{\lambda}{k}, k + \frac{\mu}{k}, \nu)$ , nous avons

$$F(\xi_k) \rightarrow \tilde{F}(0, \lambda - \mu, \lambda - \mu, 0).$$

Alors  $\kappa$  est une façon d'une strate de dimension 1 de  $S_F$ , ce cas est donc exclus.

Procédant de la même manière, nous obtenons le même résultat avec les autres choix de façons  $\kappa$  dans le groupe II et  $\kappa'$  dans le groupe III.

8)  $\kappa$  appartient au groupe II, par exemple  $\kappa = (1, 2)$ , et  $\kappa'$  appartient au groupe IV :

i) Si  $\kappa' = (1, 2)[3]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_3, x_1 - x_2, (x_1 - x_2)x_1, (x_1 - x_2)x_2, (x_1 - x_2)x_3).$$

Choisissons, par exemple,  $\xi'_k = (k + \frac{\lambda'}{k}, k + \frac{\mu'}{k}, \frac{\nu'}{k})$ , nous avons

$$F(\xi'_k) \rightarrow \tilde{F}(0, 0, \lambda' - \mu', \lambda' - \mu', 0).$$

Alors  $\kappa'$  est une façon d'une strate de dimension 1 de  $S_F$ , ce cas est donc exclus.

ii) Si  $\kappa' = (2, 3)[1]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}((x_1 - x_2)x_1, (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)),$$

d'où la contradiction avec  $F$  est dominante. Ce cas est donc exclus.

iii) Si  $\kappa' = (1, 3)[2]$ , nous obtenons le même résultat que dans le cas ii), en échangeant les variables  $x_1$  et  $x_2$ .

Procédant de la même manière, nous obtenons le même résultat avec les autres choix de façons  $\kappa$  dans le groupe II et  $\kappa'$  dans le groupe IV.

9)  $\kappa$  appartient au groupe II, par exemple  $\kappa = (1, 2)$ , et  $\kappa'$  appartient au groupe V :

i) Si  $\kappa' = (1)[2]$  ou  $\kappa' = (2)[1]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_3, (x_1 - x_2)x_2),$$

d'où la contradiction avec  $F$  est dominante. Ce cas est donc exclus.

ii) Si  $\kappa' = (1)[3]$  ou  $\kappa' = (2)[3]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_3, (x_1 - x_2)x_3),$$

d'où la contradiction avec  $F$  est dominante. Ce cas est donc exclus.

iii) Si  $\kappa' = (3)[1]$  ou  $\kappa' = (3)[2]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_1 - x_2, (x_1 - x_2)x_1, (x_1 - x_2)x_2),$$

d'où la contradiction avec  $F$  est dominante. Ce cas est donc exclus.

Procédant de la même manière, nous obtenons le même résultat avec les autres choix de façons  $\kappa$  dans le groupe II et  $\kappa'$  dans le groupe V. Ces cas sont donc exclus.

10)  $\kappa$  appartient au groupe II, par exemple  $\kappa = (1, 2)$  et  $\kappa'$  appartient au groupe VI :

i)  $\kappa' = (1)[2, 3]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_3, (x_1 - x_2)x_2, (x_1 - x_2)x_3).$$

Choisissons, par exemple,  $\xi_k = (k + \frac{\lambda}{k}, k + \frac{\mu}{k}, \nu)$  et  $\xi'_k = (k + \frac{\lambda'}{k}, \frac{\mu'}{k}, \frac{\nu'}{k})$ , nous avons :

$$\begin{aligned} F(\xi_k) &\rightarrow \tilde{F}(\nu, \lambda - \mu, 0), \\ F(\xi'_k) &\rightarrow \tilde{F}(0, \mu', \nu'). \end{aligned}$$

Alors  $\kappa$  et  $\kappa'$  sont deux façons de deux strates différentes, ce cas est donc exclus.

ii)  $\kappa' = (2)[1, 3]$  : nous obtenons le même résultat que dans le cas i), en échangeant les rôles de  $x_1$  et  $x_2$ .

iii)  $\kappa' = (3)[1, 2]$  :  $F$  est une application polynomiale de la forme

$$F = \tilde{F}(x_1 - x_2, (x_1 - x_2)x_1, (x_1 - x_2)x_2, (x_1 - x_2)x_3).$$

Choisissons, par exemple,  $\xi_k = (k + \frac{\lambda}{k}, k + \frac{\mu}{k}, \nu)$  et  $\xi'_k = (k + \frac{\lambda'}{k}, \frac{\mu'}{k}, \frac{\nu'}{k})$ , nous avons :

$$F(\xi_k) \rightarrow \tilde{F}(0, \lambda - \mu, \lambda - \mu, 0).$$

Alors  $\kappa$  est une façon d'une strate de dimension 1 de  $S_F$ , ce cas est donc exclus.

Procédant de la même manière, nous obtenons le même résultat avec les autres choix de façons  $\kappa$  dans le groupe II et  $\kappa'$  dans le groupe VI.

11)  $\kappa$  appartient au groupe III, par exemple  $\kappa = (1)$  et  $\kappa'$  appartient aussi au groupe III :

i)  $\kappa' = (2)$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_3, (x_1 - x_3)(x_2 - x_3)),$$

d'où la contradiction avec  $F$  est dominante. Ce cas est donc exclus.

ii)  $\kappa' = (3)$  : nous obtenons le même résultat que dans le cas i).

12)  $\kappa$  appartient au groupe III, par exemple  $\kappa = (1)$  et  $\kappa'$  appartient au groupe IV :

i)  $\kappa' = (1, 2)[3]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_3, x_2x_3, (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)).$$

Choisissons, par exemple,  $\xi_k = (k + \frac{\lambda}{k}, \mu, \mu + \frac{\nu}{k})$  et  $\xi'_k = (k + \frac{\lambda'}{k}, k + \frac{\mu'}{k}, \frac{\nu'}{k})$ , nous avons :

$$F(\xi_k) \rightarrow \tilde{F}(\mu, \mu^2, \nu).$$

Pour que  $\kappa$  nous fournisse une strate de dimension 2, alors  $\mu$  et  $\nu$  doivent être des nombres complexes quelconques, l'application  $F$  n'est pas dominante. Ce cas est donc exclus.

Nous obtenons le même résultat avec  $\kappa' = (1, 3)[2]$ .

ii)  $\kappa' = (2, 3)[1]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_2 - x_3, (x_2 - x_3)x_1, (x_2 - x_3)x_2, (x_2 - x_3)x_3).$$

Choisissons, par exemple,  $\xi_k = (k + \frac{\lambda}{k}, \mu, \mu + \frac{\nu}{k})$ , nous avons :

$$F(\xi_k) \rightarrow \tilde{F}(0, \nu, 0, 0).$$

Alors  $\kappa$  est une façon d'une strate de dimension 1 de  $S_F$ , ce cas est donc exclus.

Procédant de la même manière, nous obtenons le même résultat avec les autres façons  $\kappa$  dans le groupe III et  $\kappa'$  dans le groupe IV.

13)  $\kappa$  appartient au groupe III, par exemple  $\kappa = (1)$  et  $\kappa'$  appartient au groupe V :

i)  $\kappa' = (1)[2]$  ou  $\kappa' = (1)[3]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_2, x_3),$$

d'où la contradiction avec  $F$  est dominante. Ce cas est donc exclus.

ii)  $\kappa' = (2)[1]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_3, (x_2 - x_3)x_1),$$

d'où la contradiction avec  $F$  est dominante. Ce cas est donc exclus.

iii)  $\kappa' = (2)[3]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_3, (x_2 - x_3)x_3),$$

d'où la contradiction avec  $F$  est dominante. Ce cas est donc exclus.

iv)  $\kappa' = (3)[1] : F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_2, (x_2 - x_3)x_1),$$

d'où la contradiction avec  $F$  est dominante. Ce cas est donc exclus.

v)  $\kappa' = (3)[2] : F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_2, x_3),$$

d'où la contradiction avec  $F$  est dominante. Ce cas est donc exclus.

14)  $\kappa$  appartient au groupe III, par exemple  $\kappa = (1)$  et  $\kappa'$  appartient au groupe VI :

i)  $\kappa' = (1)[2, 3] : F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_2, x_3, x_2x_3, x_2 - x_3, (x_2 - x_3)x_1),$$

Avec la façon  $\kappa'$ , les variables  $x'_{2,k}$ ,  $x'_{3,k}$ ,  $x'_{2,k}x'_{3,k}$  et  $x'_{2,k} - x'_{3,k}$  tendent vers 0, donc  $\kappa'$  est une façon d'une strate de dimension 1, ce cas est donc exclus.

ii)  $\kappa' = (2)[1, 3] : F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_3, x_2x_3, (x_2 - x_3)x_1, (x_2 - x_3)x_3).$$

Choisissons, par exemple,  $\xi_k = (k + \frac{\lambda}{k}, \mu, \mu + \frac{\nu}{k})$  et  $\xi'_k = (\frac{\lambda'}{k}, k + \frac{\mu'}{k}, \frac{\nu'}{k})$ , nous avons :

$$F(\xi_k) \rightarrow \tilde{F}(\mu, \mu^2, \nu, \nu).$$

Pour que  $\kappa$  nous fournisse une strate de dimension 2, alors  $\mu$  et  $\nu$  doivent être des nombres complexes quelconques, l'application  $F$  n'est pas dominante. Ce cas est donc exclus.

Procédant de la même manière, nous obtenons le même résultat avec les autres choix de façons  $\kappa$  dans le groupe III et  $\kappa'$  dans le groupe VI.

15)  $\kappa$  appartient au groupe IV, par exemple  $\kappa = (1, 2)[3]$  et  $\kappa'$  appartient au groupe IV :

i)  $\kappa' = (1, 3)[2] : F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_2x_3, (x_1 - x_2)x_2, (x_1 - x_2)(x_1 - x_3), (x_1 - x_3)x_3).$$

Choisissons, par exemple,  $\xi_k = (k + \frac{\lambda}{k}, k + \frac{\mu}{k}, \frac{\nu}{k})$  et  $\xi'_k = (k + \frac{\lambda'}{k}, \frac{\mu'}{k}, k + \frac{\nu'}{k})$ , nous avons :

$$F(\xi_k) \rightarrow \tilde{F}(\nu, \lambda - \mu, \lambda - \mu, \nu)$$

Pour que  $\kappa$  nous fournisse une strate de dimension 2, alors  $\nu$  et  $\lambda - \mu$  doivent être des nombres complexes quelconques, l'application  $F$  n'est pas dominante. Ce cas est donc exclus.

ii)  $\kappa' = (2, 3)[1]$  : nous obtenons le même résultat que dans le cas i).

16)  $\kappa$  appartient au groupe IV, par exemple  $\kappa = (1, 2)[3]$  et  $\kappa'$  appartient au groupe V :

i)  $\kappa' = (1)[2]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_3, x_2x_3, (x_1 - x_2)x_2).$$

Choisissons, par exemple,  $\xi_k = (k + \frac{\lambda}{k}, k + \frac{\mu}{k}, \frac{\nu}{k})$  et  $\xi'_k = (k + \frac{\lambda'}{k}, \frac{\mu'}{k}, \nu')$ , nous avons :

$$\begin{aligned} F(\xi_k) &\rightarrow \tilde{F}(0, \nu, \lambda - \mu), \\ F(\xi'_k) &\rightarrow \tilde{F}(\nu', 0, \mu'). \end{aligned}$$

Alors  $\kappa$  et  $\kappa'$  sont deux façons de deux strates différentes, ce cas est donc exclus.

Nous obtenons le même résultat avec  $\kappa' = (2)[1]$ .

ii)  $\kappa' = (1)[3]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_3, x_1x_3, x_2x_3).$$

Avec la façon  $\kappa'$ , les "variables"  $x'_{3,k}$  et  $x'_{2,k}x'_{3,k}$  tendent vers 0, alors  $\kappa'$  est une façon d'une strate de dimension 1, ce cas est donc exclus.

Nous obtenons le même résultat avec  $\kappa' = (2)[3]$ .

iii)  $\kappa' = (3)[1]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_1x_3, x_1 - x_2, (x_1 - x_2)x_1, (x_1 - x_2)x_2).$$

Choisissons, par exemple,  $\xi_k = (k + \frac{\lambda}{k}, k + \frac{\mu}{k}, \frac{\nu}{k})$  et  $\xi'_k = (\frac{\lambda'}{k}, \mu', k + \frac{\nu'}{k})$ , nous avons :

$$\begin{aligned} F(\xi_k) &\rightarrow \tilde{F}(\nu, 0, \lambda - \mu, \lambda - \mu), \\ F(\xi'_k) &\rightarrow \tilde{F}(\lambda', -\mu', 0, -\mu'^2). \end{aligned}$$

Alors  $\kappa$  et  $\kappa'$  sont deux façons de deux strates différentes, ce cas est donc exclus.

Nous obtenons le même résultat avec  $\kappa' = (3)[2]$ .

Procédant de la même manière, nous obtenons le même résultat avec les autres choix de façons  $\kappa$  dans le groupe IV et  $\kappa'$  dans le groupe V.

17)  $\kappa$  appartient au groupe IV, par exemple  $\kappa = (1, 2)[3]$  et  $\kappa'$  appartient au groupe VI :

i)  $\kappa' = (1)[2, 3]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_3, x_2x_3, x_1x_3, (x_1 - x_2)x_2). \quad (4.8.10)$$

Choisissons, par exemple,  $\xi_k = (k + \frac{\lambda}{k}, k + \frac{\mu}{k}, \frac{\nu}{k})$  et  $\xi'_k = (k + \frac{\lambda'}{k}, \frac{\mu'}{k}, \frac{\nu'}{k})$ , nous avons :

$$\begin{aligned} F(\xi_k) &\rightarrow \tilde{F}(0, \nu, \nu, \lambda - \mu), \\ F(\xi'_k) &\rightarrow \tilde{F}(0, 0, \nu', \mu'). \end{aligned}$$

Pour que  $\kappa$  et  $\kappa'$  soient deux façons d'une strate de dimension 2 de  $S_F$ , les coefficients de  $x_3$ ,  $x_1x_3$  et  $(x_1 - x_2)x_2$  doivent être non nuls.

Nous prouvons maintenant que l'ensemble de Jelonek  $S_F$  d'une application  $F$  de la forme (4.8.10) n'admet que deux façons  $\kappa = (1, 2)[3]$  et  $\kappa' = (1)[2, 3]$  et est irréductible. Appelons  $\mathcal{S}$  l'hypersurface irréductible contenant les deux façons  $\kappa$  et  $\kappa'$ . Prenons une façon  $\kappa^*$  de  $S_F$  et notons  $\{\xi_k^*\} = (x_{1,k}^*, x_{2,k}^*, x_{3,k}^*)$  la suite correspondante. Puisque  $F$  doit admettre  $x_3$  comme variable, alors  $x_{3,k}^*$  ne peut pas tendre vers l'infini. Supposons que  $x_{3,k}^*$  tende vers un nombre complexe quelconque, alors  $x_{1,k}^*$  ne peut pas tendre vers l'infini, puisque  $F$  doit admettre  $x_1x_3$  comme variable. Cela signifie que  $x_{2,k}^*$  doit tendre vers l'infini et donc  $(x_{1,k}^* - x_{2,k}^*)x_{2,k}^*$  tend vers l'infini, d'où la contradiction avec la condition " $F$  doit admettre  $(x_1 - x_2)x_2$  comme variable." Donc  $x_{3,k}^*$  tend vers 0. Si  $x_{1,k}^*$  ne tend pas vers l'infini, alors  $x_{2,k}^*$  doit tendre vers l'infini et donc  $(x_{1,k}^* - x_{2,k}^*)x_{2,k}^*$  tend vers l'infini, d'où la contradiction. Nous en déduisons que  $x_{1,k}^*$  doit tendre vers l'infini. Donc  $x_{2,k}^*$  tend ou bien vers l'infini ou bien vers 0. La façon  $\kappa^*$  est donc ou bien  $(1, 2)[3]$  ou bien  $(1)[2, 3]$ . Alors  $S_F$  n'admet que deux façons  $\kappa$  et  $\kappa'$ , cela signifie que  $S_F$  est l'hypersurface irréductible  $\mathcal{S}$ .

ii)  $\kappa' = (2)[1, 3]$  : nous procédons comme dans le cas i) en échangeant des rôles de  $x_1$  et  $x_2$ , et nous obtenons

$$F = \tilde{F}(x_3, x_1x_3, x_2x_3, (x_1 - x_2)x_1), \quad (4.8.11)$$

où les coefficients de  $x_3$ ,  $x_2x_3$  et  $(x_1 - x_2)x_1$  sont non nuls.

Nous obtenons ainsi le cas (iii) de notre théorème.

iii)  $\kappa' = (3)[1, 2]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_1x_3, x_2x_3, x_1 - x_2, (x_1 - x_2)x_1, (x_1 - x_2)x_2). \quad (4.8.12)$$

Choisissons, par exemple,  $\xi_k = (k + \frac{\lambda}{k}, k + \frac{\mu}{k}, \frac{\nu}{k})$  et  $\xi'_k = (\frac{\lambda'}{k}, \frac{\mu'}{k}, k + \frac{\nu'}{k})$ , nous avons :

$$\begin{aligned} F(\xi_k) &\rightarrow \tilde{F}(\nu, \nu, 0, \lambda - \mu, \lambda - \mu), \\ F(\xi'_k) &\rightarrow \tilde{F}(\lambda', \mu', 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Pour que  $\kappa$  et  $\kappa'$  soient deux façons d'une strate de dimension 2 de  $S_F$ , nous devons avoir

$$F = \tilde{F}(x_1x_3, x_2x_3, x_1 - x_2, r_1x_1x_3 + r_2x_2x_3 + r_3(x_1 - x_2)x_1 + r_4(x_1 - x_2)x_2),$$

où

- a)  $r_i \in \mathbb{C}$  pour  $i = 1, \dots, 4$  tels que ou bien  $(r_1 \neq 0, r_2 \neq 0)$ , ou bien  $(r_1, r_2) \neq (0, 0)$  et  $(r_3, r_4) \neq (0, 0)$ ,
- b) au moins l'un des coefficients de  $x_1x_3$  et  $x_2x_3$  est non nul,
- c) les coefficients de  $x_1 - x_2$  et  $r_1x_1x_3 + r_2x_2x_3 + r_3(x_1 - x_2)x_1 + r_4(x_1 - x_2)x_2$  sont non nuls.

Nous obtenons ainsi le cas (iv) de notre théorème.

Procédant de la même manière, nous obtenons les résultats (v), (vi), (vii) et (viii) de notre théorème avec les autres choix de façons  $\kappa$  dans le groupe IV et  $\kappa'$  dans le groupe VI.

De la même manière que dans le cas ci-dessus, nous montrons que  $S_F$  n'admet que deux façons et  $S_F$  est irréductible.

18)  $\kappa$  appartient au groupe V, par exemple  $\kappa = (1)[2]$  et  $\kappa'$  appartient aussi au groupe V :

- i)  $\kappa' = (1)[3]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_2, x_3),$$

d'où la contradiction avec  $F$  est dominante. Ce cas est donc exclus.

- ii)  $\kappa' = (2)[1]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_3, x_1x_2),$$

d'où la contradiction avec  $F$  est dominante. Ce cas est donc exclus.

- iii)  $\kappa' = (2)[3]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_3, x_2x_3, (x_2 - x_3)x_3),$$

d'où la contradiction avec  $F$  est dominante. Ce cas est donc exclus.

- iv)  $\kappa' = (3)[1]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_2, x_1x_2, (x_1 - x_2)x_2),$$

d'où la contradiction avec  $F$  est dominante. Ce cas est donc exclus.

- v)  $\kappa' = (3)[2]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_2, x_1x_2, x_2x_3).$$

Avec la façon  $\kappa'$ , les suites  $x'_{2,k}$  et  $x'_{1,k}x'_{2,k}$  tendent vers 0, alors  $\kappa'$  est une façon d'une strate de dimension 1, ce cas est donc exclus.

Procédant de la même manière, nous obtenons le même résultat avec les autres choix de façons  $\kappa$  dans le groupe V et  $\kappa'$  dans le groupe V.

19)  $\kappa$  appartient au groupe V, par exemple  $\kappa = (1)[2]$  et  $\kappa'$  appartient au groupe VI :

i)  $\kappa' = (1)[2, 3]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_2, x_3, x_1x_2).$$

Avec la façon  $\kappa'$ , les suites  $x'_{2,k}$  et  $x'_{3,k}$  tendent vers 0, alors  $\kappa'$  est une façon d'une strate de dimension 1, ce cas est donc exclu.

ii)  $\kappa' = (2)[1, 3]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_3, x_1x_2, x_2x_3).$$

Choisissons, par exemple,  $\xi_k = (k + \frac{\lambda}{k}, \frac{\mu}{k}, \nu)$  et  $\xi'_k = (\frac{\lambda'}{k}, k + \frac{\mu'}{k}, \frac{\nu'}{k})$ , nous avons :

$$\begin{aligned} F(\xi_k) &\rightarrow \tilde{F}(\nu, \mu, 0), \\ F(\xi'_k) &\rightarrow \tilde{F}(0, \lambda', \nu'). \end{aligned}$$

Alors  $\kappa$  et  $\kappa'$  sont deux façons de deux strates différentes, ce cas est donc exclu.

iii)  $\kappa' = (3)[1, 2]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_2, x_1x_2, x_2x_3).$$

Avec la façon  $\kappa'$ , les suites  $x'_{2,k}$  et  $x'_{1,k}x'_{2,k}$  tendent vers 0, alors  $\kappa'$  est une façon d'une strate de dimension 1, ce cas est donc exclu.

Procédant de la même manière, nous obtenons le même résultat avec les autres choix de façons  $\kappa$  dans le groupe V et  $\kappa'$  dans le groupe VI.

20)  $\kappa$  appartient au groupe VI, par exemple  $\kappa = (1)[2, 3]$  et  $\kappa'$  appartient au groupe VI : Si  $\kappa' = (2)[1, 3]$ , de l'exemple 4.8.3, nous avons

$$F = \tilde{F}(x_3, x_1x_2, r_1x_2x_3 + r_2x_3x_1), \quad (4.8.13)$$

où  $r_1$  et  $r_2$  sont des nombres complexes non nuls.

Procédant de la même manière pour  $\kappa' = (3)[1, 2]$ , nous obtenons le cas  $(ix)$  de notre théorème.

Nous avons ainsi étudié tous les cas possibles, ce qui nous donne le théorème 4.8.8 .

□



**Remarque 4.8.14.** Si le degré de l'application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  est plus grand que 2, alors une strate de dimension 2 de  $S_F$  peut admettre deux façons qui ne sont pas l'un des 9 cas décrits dans le théorème 4.8.8. Les exemples suivants montrent ce fait :

**Exemple 4.8.15.** 1) Soit  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  l'application polynomiale dominante telle que

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 x_3, x_1 x_2 + x_1 x_3, x_1).$$

L'ensemble  $S_F$  est le plan  $\alpha_3 = 0$ , qui admet deux façons (2)[1] et (3)[1].

2) Soit  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  une application polynomiale dominante telle que

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 x_3, x_2 x_3, x_2 + x_3).$$

L'ensemble  $S_F$  est le plan  $\alpha_2 = 0$ , qui admet deux façons (1)[2] et (1)[3].

**Remarque 4.8.16.** Pour une application  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  avec  $n > 3$ , le théorème 4.8.1 donne plus de cas possibles que dans le théorème 4.8.8, comme le montrent les exemples suivants :

**Exemple 4.8.17.** Soit  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3, x_4)}^4 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)}^4$  l'application polynomiale dominante définie par

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 x_2 x_3 x_4, x_1 x_2 x_3, x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3, x_1 + x_2).$$

Sur la strate  $S_3^1 = \{\alpha_2 = 0\}$  contenue dans  $S_F$ , nous avons trois façons :

$$\kappa_1 = (4)[1] \text{ correspondant à la suite } \{\xi_k^1\} = \left\{ \left( \frac{\lambda_1}{k}, \mu_1, \nu_1, k \right) \right\},$$

$$\kappa_2 = (4)[2] \text{ correspondant à la suite } \{\xi_k^2\} = \left\{ \left( \mu_2, \frac{\lambda_2}{k}, \nu_2, k \right) \right\},$$

$$\kappa_3 = (4)[3] \text{ correspondant à la suite } \{\xi_k^3\} = \left\{ \left( \mu_3, \nu_3, \frac{\lambda_3}{k}, k \right) \right\}.$$

Donc pour chaque point  $a \in S_3^1$ , nous avons  $or(a) = 3$ .

**Exemple 4.8.18.** Soit  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3, x_4)}^4 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)}^4$  l'application polynomiale dominante définie par

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 x_2 x_3 x_4, x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2, x_1 x_3 + x_2 x_3, x_1 + x_2).$$

Sur la strate  $S_3^1 = \{\alpha_2 = 0\}$  contenue dans  $S_F$ , nous avons deux façons :

$$\kappa_1 = (4)[1] \text{ correspondante avec la suite } \{\xi_k^1\} = \left\{ \left( \frac{\lambda_1}{k}, \mu_1, \nu_1, k \right) \right\},$$

$$\kappa_2 = (4)[2] \text{ correspondante avec la suite } \{\xi_k^2\} = \left\{ \left( \mu_2, \frac{\lambda_2}{k}, \nu_2, k \right) \right\}.$$

Avec la façon  $\kappa_3 = (4)[3]$  correspondante avec la suite  $\{\xi_k^3\} = \left\{ \left( \mu_3, \nu_3, \frac{\lambda_3}{k}, k \right) \right\}$ , nous avons une autre strate  $S_3^3 = \{\alpha_4 = 0\}$  de dimension 3 de  $S_F$ . Dans ce cas, la strate  $S_3^1 = \{\alpha_2 = 0\}$  de dimension 3 de  $S_F$  admet deux façons mais  $S_F$  n'est pas irréductible.

**Conjecture 4.8.19.** *Sur une hypersurface irréductible de  $S_F$  d'une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , il existe au maximum  $n - 1$  façons.*

**Remarque 4.8.20.** Nous voyons que, si  $S_1 \subset \overline{S_2}$  alors  $or(a) \geq or(a')$ , pour  $a \in S_1$  et  $a' \in S_2$ . L'exemple suivant montre qu'il est possible d'avoir une seule façon sur une strate qui n'est pas de dimension maximum.

**Exemple 4.8.21.** Soit l'application  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  telle que

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 x_2 x_3)$$

(voir exemple 4.2.24, page 82). L'ensemble  $S_F$  est composé de deux plans  $(0\alpha_1\alpha_3)$  et  $(0\alpha_2\alpha_3)$ . Si nous prenons un point  $a \in 0\alpha_3 = (0\alpha_2\alpha_3) \cap (0\alpha_1\alpha_3)$ , alors  $\Xi(a) = \{(3)[1, 2]\}$ . La strate  $0\alpha_3$  n'est pas la strate de dimension la plus grande, cependant pour tout point  $a \in 0\alpha_3$ , nous avons  $or(a) = 1$ .



# Chapitre 5. Sur les stratifications des ensembles $K_0(F)$ , $S_F \cup K_0(F)$ , $B(F)$ , $K(F)$ , $B_\infty(F)$ , $K_\infty(F)$ et de l'ensemble de test

Dans ce chapitre, nous rappelons la stratification de l'ensemble des points critiques d'une application polynomiale par *le rang*, telle que décrite par Thom. Nous donnons une stratification de l'ensemble  $S_F \cup K_0(F)$ , compatible avec  $S_F$ , en utilisant la stratification de  $S_F$  définie par les façons. Comme applications, nous obtenons aussi des stratifications de l'ensemble de bifurcation  $B(F)$ , de l'ensemble des points de bifurcations à l'infini  $B_\infty(F)$ , de l'ensemble  $K_\infty(F)$  des valeurs critiques asymptotiques de  $F$ , de l'ensemble  $K(F) := K_0(F) \cup K_\infty(F)$  et de l'ensemble de test des applications polynomiales défini par Jelonek.

Dans la première section de ce chapitre, nous étudions en détail les stratifications des ensembles  $Sing F$ ,  $K_0(F)$  et  $S_F \cup K_0(F)$  dans le cas d'un exemple précis. Les résultats généraux sont donnés à partir de la deuxième section qu'il est possible de lire directement.

## 5.1 Un exemple

**Exemple 5.1.1.** Considérons l'application polynomiale  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  telle que

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^3 - x_1x_2x_3, x_2x_3, x_3x_1).$$

1) Déterminons l'ensemble  $S_F$  et une stratification de  $S_F$  : supposons que  $a \in S_F$ , il existe une suite  $\{\xi_k\} = \{(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})\}$  tendant vers l'infini et telle que  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$ . Nous distinguons les cas suivants :

i) Si  $x_{1,k}$  tend vers l'infini, alors  $x_{2,k}x_{3,k}$  tend vers l'infini puisque  $x_{1,k}^3 - x_{1,k}x_{2,k}x_{3,k}$  ne tend pas vers l'infini, d'où la contradiction.

ii) Si  $x_{1,k}$  tend vers un nombre complexe quelconque  $\lambda$ , alors  $x_{3,k}$  ne tend pas vers l'infini puisque  $x_{1,k}x_{3,k}$  ne tend pas vers l'infini. Alors  $x_{2,k}$  tend vers l'infini et  $x_{3,k}$  tend vers 0 puisque  $x_{2,k}x_{3,k}$  ne tend pas vers l'infini. La suite  $\{\xi_k\} = \{(\lambda, k\mu, \frac{\nu}{k})\}$  satisfait  $F(\xi_k) \rightarrow (\lambda^3 - \lambda\mu\nu, \mu\nu, 0)$ . Donc nous avons  $S_{F_1} = \{\alpha_3 = 0\}$ .

Pour un point  $a \in S_{F_1}$ , nous avons  $\Xi(a) = \{(2)[3]\}$ .

iii) Si  $x_{1,k}$  tend vers 0, nous avons les deux possibilités : ou bien  $x_{3,k}$  tend vers l'infini, ou bien  $x_{2,k}$  tend vers l'infini.

a) Si  $x_{3,k}$  tend vers l'infini, alors  $x_{2,k}$  tend vers 0 puisque  $x_{2,k}x_{3,k}$  ne tend pas vers l'infini. La suite  $\{\xi_k\} = \{(\frac{\lambda}{k}, \frac{\mu}{k}, k\nu)\}$  satisfait  $F(\xi_k) \rightarrow (0, \mu\nu, \lambda\nu)$ . Donc nous avons  $S_{F_2} = \{\alpha_1 = 0\}$ .

Pour un point  $a \in S_{F_2}$ , nous avons  $\Xi(a) = \{(3)[1, 2]\}$ .

b) Si  $x_{2,k}$  tend vers l'infini, alors  $x_{3,k}$  tend vers 0 puisque  $x_{2,k}x_{3,k}$  ne tend pas vers l'infini. La suite  $\{\xi_k\} = \left\{\left(\frac{\lambda}{k}, k\mu, \frac{\nu}{k}\right)\right\}$  satisfait  $F(\xi_k) \rightarrow (0, \mu\nu, 0)$ .

L'ensemble  $S_F$  est donc la réunion  $S_F = \{\alpha_1 = 0\} \cup \{\alpha_3 = 0\}$ .

Soit un point  $a = (0, \alpha_2, 0) \in S_{F_1} \cap S_{F_2}$ . Il y a en fait deux classes de suites  $[\{\xi_k^1\}] = [\{(0, k\alpha_2, \frac{1}{k})\}]$  et  $[\{\xi_k^2\}] = [\{(0, \frac{1}{k}, k\alpha_2)\}]$  telles que  $F(\xi_k^1)$  et  $F(\xi_k^2)$  tendent vers  $a$ . Alors nous avons  $\Xi(a) = \{(2)[1, 3], (3)[1, 2]\}$ . Une stratification de  $S_F$  est donc donnée par :

$$S_F \supset 0\alpha_2 \supset \emptyset.$$

2) Montrons que l'application polynomiale  $F$  est dominante :

Soit un point  $a \in \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3 \setminus S_F$ , alors  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  avec  $\alpha_1 \neq 0$  et  $\alpha_3 \neq 0$ . Déterminons les solutions de  $F(x_1, x_2, x_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , c'est-à-dire

$$\alpha_1 = x_1^3 - x_1x_2x_3, \quad \alpha_2 = x_2x_3, \quad \alpha_3 = x_3x_1. \quad (5.1.2)$$

Puisque  $\alpha_3 \neq 0$  alors  $x_1 \neq 0$  et  $x_3 \neq 0$  et  $x_1 = \frac{\alpha_3}{x_3}$ .

i) Si  $\alpha_2 = 0$  alors  $x_2 = 0$  et  $x_1^3 = \alpha_1 \neq 0$ . Donc le système d'équations (5.1.2) a toujours des solutions.

ii) Si  $\alpha_2 \neq 0$  alors  $x_3 \neq 0$ . Remplaçons  $x_2 = \frac{\alpha_2}{x_3}$  et  $x_1 = \frac{\alpha_3}{x_3}$  dans l'équation  $x_1^3 - x_1x_2x_3 = \alpha_1$ , nous obtenons une équation de degré 3 en  $x_3$  :  $\alpha_1x_3^3 + \alpha_2\alpha_3x_3^2 - \alpha_3^3 = 0$ . Cette équation a toujours une solution  $x_3 \neq 0$ . Le système d'équations (5.1.2) admet donc toujours des solutions.

L'application  $F$  est donc dominante.

3) Déterminons l'ensemble  $S_F \cap F(X)$ , où  $X = \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3$  :

i) Considérons un point  $(\alpha_1, \alpha_2, 0) \in S_{F_1}$  tel que  $\alpha_1 \neq 0$  et  $\alpha_2 \neq 0$ . Si ce point appartient à  $F(X)$ , nous avons le système d'équations :

$$x_1^3 - x_1x_2x_3 = \alpha_1 \neq 0, \quad x_2x_3 = \alpha_2 \neq 0, \quad x_3x_1 = 0. \quad (5.1.3)$$

Puisque  $x_2x_3 = \alpha_2 \neq 0$  alors  $x_2 \neq 0$  et  $x_3 \neq 0$ . Puisque  $x_3 \neq 0$  et  $x_3x_1 = 0$ , il vient  $x_1 = 0$  et  $x_1^3 - x_1x_2x_3 = 0$  donc  $\alpha_1 = 0$ , d'où la contradiction. Alors pour tout  $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ , le point  $(\alpha_1, \alpha_2, 0)$  n'appartient pas à  $F(X)$ .

ii) Considérons maintenant un point  $(0, \alpha_2, \alpha_3) \in S_{F_2}$  tel que  $\alpha_2 \neq 0$  et  $\alpha_3 \neq 0$ . Le système d'équations :

$$x_1^3 - x_1x_2x_3 = 0, \quad x_2x_3 = \alpha_2 \neq 0, \quad x_3x_1 = \alpha_3 \neq 0. \quad (5.1.4)$$

est équivalent à :

$$x_1^3 - x_1x_2x_3 = 0, \quad x_2x_3 = \alpha_2, \quad x_3x_1 = \alpha_3, \quad x_1, x_2, x_3 \neq 0.$$

Nous avons  $x_1^3 - x_1x_2x_3 = x_1(x_1^2 - x_2x_3) = 0$  et  $x_1^2 - x_2x_3 = 0$  (puisque  $x_1 \neq 0$ ). Donc  $x_1^2 = x_2x_3 = \alpha_2 \neq 0$ . Le système (5.1.4) admet toujours des solutions  $(x_1, x_2, x_3)$  telles que

$$x_1^2 = \alpha_2 \neq 0, \quad x_3 = \frac{\alpha_3}{x_1}, \quad x_2 = \frac{\alpha_2}{x_3}.$$

Donc nous avons  $(0, \alpha_2, \alpha_3) \in F(X)$  pour tous  $\alpha_2, \alpha_3 \neq 0$ .

iii) Considérons maintenant un point  $(0, \alpha_2, 0) \in S_{F_1} \cap S_{F_2}$ . Nous avons le système d'équations

$$x_1^3 - x_1x_2x_3 = 0, \quad x_2x_3 = \alpha_2, \quad x_3x_1 = 0. \quad (5.1.5)$$

Si  $\alpha_2 \neq 0$  alors  $x_3 \neq 0$  et donc  $x_1 = 0$ . Le système (5.1.5) a des solutions  $(x_1, x_2, x_3)$  telles que  $x_1 = 0, x_2x_3 = \alpha_2$ . Si  $\alpha_2 = 0$ , alors  $x_2x_3 = 0$ , donc  $x_1x_2x_3 = 0$  et  $x_1^3 = 0$ , et donc  $x_1 = 0$ . Le système d'équations (5.1.5) a des solutions  $(x_1, x_2, x_3)$  telles que  $x_1 = 0$  et  $x_2x_3 = 0$ . Alors pour tout  $\alpha_2$ , le point  $(0, \alpha_2, 0)$  est dans  $F(X)$ . En particulier, l'origine  $\{0\} = \{(0, 0, 0)\}$  appartient à  $F(X)$ . Finalement l'axe  $0\alpha_2$  est contenu dans  $F(X)$ .

iv) Considérons maintenant un point  $(0, 0, \alpha_3) \in S_{F_2}$  tel que  $\alpha_3 \neq 0$ . Nous avons le système d'équations

$$x_1^3 - x_1x_2x_3 = 0, \quad x_2x_3 = 0, \quad x_3x_1 = \alpha_3 \neq 0. \quad (5.1.6)$$

Puisque  $x_3x_1 = \alpha_3 \neq 0$  alors  $x_1 \neq 0$  et  $x_3 \neq 0$ . Puisque  $x_2x_3 = 0$  et  $x_3 \neq 0$  alors  $x_2 = 0$ . Puisque  $x_1^3 - x_1x_2x_3 = 0$  et  $x_2 = 0$  alors  $x_1^3 = 0$ , d'où la contradiction. Donc pour tout  $\alpha_3 \neq 0$ , le point  $(0, 0, \alpha_3)$  n'appartient pas à  $F(X)$ .

v) Considérons enfin un point  $(\alpha_1, 0, 0)$  tel que  $\alpha_1 \neq 0$ . Nous avons le système d'équations

$$x_1^3 - x_1x_2x_3 = \alpha_1 \neq 0, \quad x_2x_3 = 0, \quad x_3x_1 = 0. \quad (5.1.7)$$

Puisque  $x_1^3 - x_1x_2x_3 = \alpha_1 \neq 0$  et  $x_2x_3 = 0$  alors  $x_1^3 = \alpha_1$  et  $x_1 \neq 0$ . Puisque  $x_1 \neq 0$  et  $x_3x_1 = 0$  alors  $x_3 = 0$ .

Donc le système (5.1.7) a des solutions  $(x_1, x_2, x_3)$  telles que  $x_1^3 = \alpha_1$  et  $x_3 = 0$ . Donc pour tout  $\alpha_1$ , le point  $(\alpha_1, 0, 0)$  appartient à  $F(X)$ .

En résumé, il vient

$$F(X) \cap S_F = ([ (0\alpha_2\alpha_3) \cup 0\alpha_1 ] \setminus 0\alpha_3) \cup \{0\},$$

$$S_F \setminus F(X) = (0\alpha_1\alpha_2 \cup 0\alpha_3) \setminus (0\alpha_1 \cup 0\alpha_2).$$

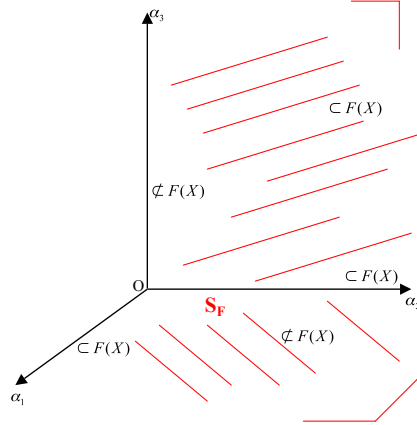


FIGURE 5.39 – Les ensembles  $F(X)$  et  $S_F$

4) Déterminons l'ensemble  $K_0(F)$ . Nous avons

$$J_F = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - x_2x_3 & -x_1x_3 & -x_1x_2 \\ 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \end{pmatrix},$$

$$|J_F(x_1, x_2, x_3)| = x_1x_3(3x_1^2 - x_2x_3).$$

Si  $|J_F(x_1, x_2, x_3)| = 0$  alors  $x_1 = 0$  ou  $x_3 = 0$  ou  $3x_1^2 = x_2x_3$ , ce qui donne les trois sous-ensembles de  $Sing F$  :

Si  $x_1 = 0$  alors nous avons  $F(0, x_2, x_3) = (0, x_2x_3, 0)$  et  $0\alpha_2 \subset K_0(F)$ .

Si  $x_3 = 0$  alors nous avons  $F(x_1, x_2, 0) = (x_1^3, 0, 0)$  et  $0\alpha_1 \subset K_0(F)$ .

Si  $3x_1^2 = x_2x_3$  alors  $F(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1^3, 3x_1^2, x_3x_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ . Si  $x_1 = 0$  alors  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . Si  $x_1 \neq 0$  alors  $\alpha_1 \neq 0$  et  $\alpha_2 \neq 0$ . Puisque  $3x_1^2 = x_2x_3$  et  $x_1 \neq 0$  donc  $x_3 \neq 0$ , alors  $\alpha_3 \neq 0$ . Par ailleurs, nous avons  $27\alpha_1^2 = 4\alpha_2^3$ . Notons  $(\mathcal{S})$  la partie de la surface d'équations

$$27\alpha_1^2 = 4\alpha_2^3, \quad \alpha_3 = t \in \mathbb{C}$$

telle que  $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0, \alpha_3 \neq 0$ . Alors, nous avons  $(\mathcal{S}) \cup \{0\} \subset K_0(F)$ .

Finalement, nous avons  $K_0(F) = (\mathcal{S}) \cup 0\alpha_1 \cup 0\alpha_2$  et la Figure 5.40 de l'ensemble  $K_0(F)$ .

Nous notons que  $K_0(F)$  ne contient pas  $0\alpha_3 \setminus \{0\}$  ni la courbe  $(\mathcal{C})$  d'équation  $27\alpha_1^2 = 4\alpha_2^3$  dans  $(0\alpha_1\alpha_2)$ . Ceci est cohérent puisque  $0\alpha_3 \setminus \{0\} \not\subset F(X)$  et  $(\mathcal{C}) \subset (0\alpha_1\alpha_2) \not\subset F(X)$  mais  $K_0(F) \subset F(X)$ . Cependant nous notons que  $\{0\} \in K_0(F)$  et l'origine est un point singulier de  $K_0(F)$ , donc  $K_0(F)$  n'est pas lisse.

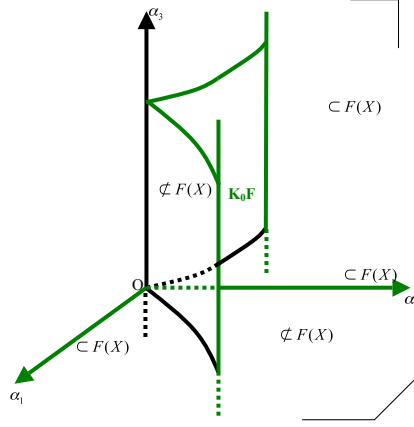


FIGURE 5.40 – L'ensemble  $K_0(F)$

5) Une stratification des ensembles  $\mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3$ ,  $Sing F$ ,  $F(\mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3)$  et  $K_0(F)$  :  
Nous avons

$$Sing F = \{(0, x_2, x_3)\} \cup \{(x_1, x_2, 0)\} \cup \{(x_1, x_2, x_3) : 3x_1^2 = x_2x_3\}.$$

Pour  $i = 0, 1, 2, 3$ , considérons les sous-ensembles

$$V^i = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : \text{Rang } J_F(x_1, x_2, x_3) = i\}.$$

Ici, nous notons que  $J_F := J_F(x_1, x_2, x_3)$ . Considérons les cas suivants :

i) Si  $x_1 \neq 0$ ,  $x_3 \neq 0$  et  $3x_1^2 \neq x_2x_3$  alors  $\text{Rang } J_F = 3$ .

ii) Si  $x_1 = 0$ , alors nous avons :

- a) si  $x_3 \neq 0$  alors  $\text{Rang } J_F = 2$ ,
- b) si  $x_3 = 0$  et  $x_2 \neq 0$  alors  $\text{Rang } J_F = 1$ ,
- c) si  $x_2 = x_3 = 0$  alors  $\text{Rang } J_F = 0$ .

iii) Si  $x_3 = 0$ , alors nous avons :

- a) si  $x_1 \neq 0$  alors  $\text{Rang } J_F = 2$ ,
- b) si  $x_1 = 0$  et  $x_2 \neq 0$  alors  $\text{Rang } J_F = 1$ ,
- c) si  $x_1 = x_2 = 0$  alors  $\text{Rang } J_F = 0$ .

iv) Si  $x_2x_3 = 3x_1^2$ , alors nous avons :

- a) si  $x_3 \neq 0$  alors  $\text{Rang } J_F = 2$ ,  
si  $x_3 = 0$ , alors  $x_1 = 0$  donc nous avons :
- b) si  $x_3 = x_1 = 0$  et  $x_2 \neq 0$  alors  $\text{Rang } J_F = 1$ ,



c) si  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  alors  $\text{Rang} J_F = 0$ .

Alors, nous avons  $\mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 = \bigcup_{i=0}^3 V^i$  et  $\text{Sing} F = V^0 \cup V^1 \cup V^2$ , où

$$V^0 = \{(0, 0, 0)\},$$

$$V^1 = \{(0, x_2, 0) : x_2 \neq 0\},$$

$$V^2 = \{(0, x_2, x_3) : x_3 \neq 0\} \cup \{(x_1, x_2, 0) : x_1 \neq 0\} \cup \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 \neq 0, x_2 x_3 = 3x_1^2\},$$

$$V^3 = \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \setminus \text{Sing} F.$$

De plus, nous avons  $F(\mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3) = \bigcup_{i=0}^3 F(V^i)$  et  $K_0(F) = F(V^0) \cup F(V^1) \cup F(V^2)$ . Nous voyons que  $V^2$  n'est pas lisse ( $0x_3 \setminus \{0\}$  en est la partie singulière). La collection  $\{V^0, V^1, V^2, V^3\}$  n'est pas encore une partition ou une stratification de  $\mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3$ . Il faut donc subdiviser  $\{V^0, V^1, V^2, V^3\}$ . Considérons maintenant les sous-ensembles suivants de  $\mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3$  :

$$V^3 := \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \setminus \text{Sing} F,$$

$$V_1^2 := \{(x_1, x_2, x_3) : 3x_1^2 = x_2 x_3, x_3 \neq 0\},$$

$$V_2^2 := \{(0, x_2, x_3) : x_3 \neq 0\} \quad V_3^2 := \{(x_1, x_2, 0) : x_1 \neq 0\},$$

$$V^1 := \{(0, x_2, 0) : x_2 \neq 0\},$$

$$V^0 := \{(0, 0, 0)\}.$$

Remarquons que  $\{V^3, V_1^2, V_2^2, V_3^2, V^1, V^0\}$  n'est pas une partition de  $\mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3$  puisque  $V_1^2 \cap V_2^2 = 0x_3 \setminus \{0\}$ . Considérons maintenant les sous-ensembles :

$$V'^3 := \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \setminus \text{Sing} F,$$

$$V_1'^2 := V_1^2 \setminus 0x_3, \quad V_2'^2 := V_2^2 \setminus 0x_3, \quad V_3'^2 := V_3^2 \setminus 0x_3,$$

$$V_1'^1 := V^1 \setminus \{0\} = 0x_2 \setminus \{0\}, \quad V_2'^1 = 0x_3 \setminus \{0\},$$

$$V'^0 := \{0\}.$$

Nous obtenons ainsi une partition de  $\mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3$ , compatible avec  $\text{Sing}(F)$ . Elle définit, en fait, une stratification de  $\mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3$  et donc une stratification de  $\text{Sing}(F)$  (voir figure 5.41).

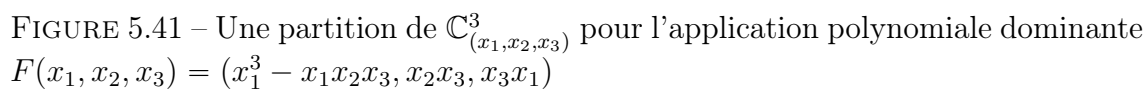
Calculons le rang  $\text{Rang} J_{F|TV'_i}$  pour chaque strate. Nous avons :

$$\text{Rang} J_{F|TV'^3} = 3,$$

$$\text{Rang} J_{F|TV_1'^2} = 2,$$

$$\text{Rang} J_{F|TV_2'^2} = \text{Rang} J_{F|TV_3'^2} = 1,$$

$$\text{Rang} J_{F|TV_1'^1} = \text{Rang} J_{F|TV_2'^1} = \text{Rang} J_{F|TV'^0} = 0.$$


$$W_j^{i,k} := F(\{x \in V_j^i : \text{Rang} J_{F|T_x V_j^i} = k\}).$$
$$\begin{aligned} W^{3,3} &= \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3 \setminus K_0(F), \\ W^{2,2} &= (\mathcal{S}), \\ W_2^{2,1} &= 0\alpha_2, \\ W_3^{2,1} &= 0\alpha_1, \\ W_1^{1,0} &= W_2^{1,0} = W^{0,0} = \{0\}. \end{aligned}$$
$$W_j^{i,k} := \{x \in W_j^{i,k} : x \notin W_{j'}^{i',k'}, \forall (i', j', k') \neq (i, j, k)\}.$$

143

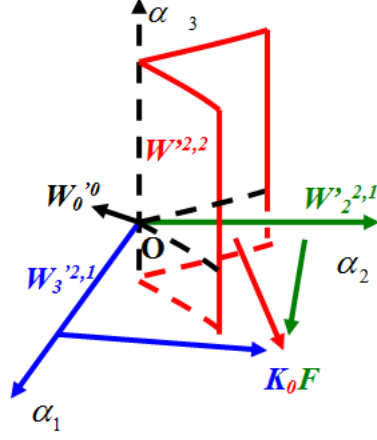


FIGURE 5.42 – Une partition de  $K_0(F)$  pour l'application polynomiale dominante  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^3 - x_1x_2x_3, x_2x_3, x_3x_1)$

6) Stratification de l'ensemble  $S_F \cup K_0(F)$  :

Une stratification de l'ensemble  $S_F \cup K_0(F)$  est donnée par la filtration :

$$S_F \cup K_0(F) \supset 0\alpha_2 \supset \emptyset.$$

La strate  $(S_F \cup K_0(F)) \setminus 0\alpha_2$  a trois composantes :

1. la strate  $X_1 = (0\alpha_2\alpha_3) \setminus 0\alpha_2$  où  $\Xi(a) = \{(3)[1, 2]\}$  pour un point  $a \in X_1$ ,
2. la strate  $X_2 = (0\alpha_1\alpha_2) \setminus 0\alpha_2$  où  $\Xi(a) = \{(2)[3]\}$  pour un point  $a \in X_2$ ,
3. la strate  $X_3 = (\mathcal{S}) \setminus S_F = (\mathcal{S}) \setminus (0\alpha_3 \cup (\mathcal{C}))$  est une strate de  $K_0(F) \setminus S_F$ , nous avons donc, par définition,  $\Xi(a) = \emptyset$  pour un point  $a \in X_3$ . Rappelons qu'ici  $(\mathcal{C})$  est la courbe d'équation  $27\alpha_1^2 = 4\alpha_2^3 \subset (0\alpha_1\alpha_2)$  et  $(\mathcal{S})$  la partie de la surface d'équations

$$27\alpha_1^2 = 4\alpha_2^3, \quad \alpha_3 = t \in \mathbb{C}$$

telle que  $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0, \alpha_3 \neq 0$ .

La strate  $0\alpha_2$  a seulement une composante où  $\Xi(a) = \{(2)[1, 3], (3)[1, 2]\}$  pour un point  $a \in 0\alpha_2$ .

**Remarque 5.1.8.** Pour une application polynomiale  $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ , soit  $X = \mathbb{C}^m$ , nous avons :

1) En général, l'ensemble  $S_F \cap F(X) \neq \emptyset$  est non vide. La relation entre les ensembles  $F(X)$ ,  $S_F$  et  $K_0(F)$  est indiquée dans le diagramme 5.43 suivant :

Si  $F$  est dominante, alors  $\mathbb{C}^n = \overline{F(X)} = F(X) \cup S_F$ , donc la relation entre  $F(X)$ ,  $S_F$ ,  $K_0(F)$  et  $\mathbb{C}^n$  est montrée dans le diagramme 5.44.

2) En général,  $K_0(F)$  n'est pas fermé. Dans ce cas, stratifier l'ensemble  $K_0(F)$  n'a pas de sens, c'est-à-dire que l'axiome de frontière n'est pas vérifié. Par exemple,

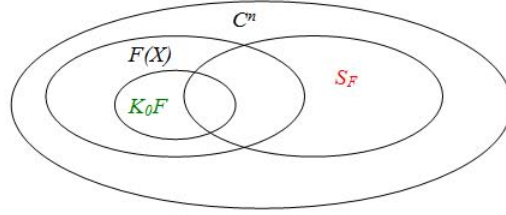


FIGURE 5.43 – Relation entre les ensembles  $F(X)$ ,  $S_F$  et  $K_0(F)$

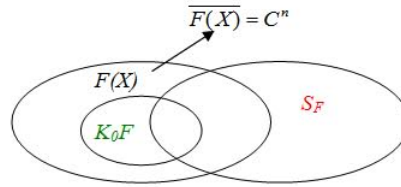


FIGURE 5.44 – Relation entre les ensembles  $F(X)$ ,  $S_F$  et  $K_0(F)$  quand  $F$  est dominante

dans l'exemple précédent,  $\overline{K_0(F)} \setminus K_0(F) = 0\alpha_3 \setminus \{0\}$  n'est pas une réunion de strates de  $K_0(F)$ . Par contre, nous pouvons stratifier l'ensemble  $\overline{K_0(F)}$ .

3) Dans l'exemple précédent, l'ensemble  $\overline{K_0(F)}$  a des composantes de dimensions différentes :

- + Une strate de dimension 2 :  $(\mathcal{S})$ .
- + Des strates de dimension 1 :  $0\alpha_1, 0\alpha_2, 0\alpha_3$ .
- + Une strate de dimension 0 : l'origine 0.

lesquelles sont dans  $K_0(F)$ , sauf l'axe  $0\alpha_3$ .

Nous remarquons que  $0\alpha_3 \subset S_F$ , ce qui nous conduit à la question naturelle : “Notons  $k$  la plus grande des dimensions des composantes de dimension pure de  $K_0(F)$ . Est-ce que les composantes de  $\overline{K_0(F)}$  de dimension (strictement) plus petite que  $k$  sont dans  $S_F$  ?”.

Dans cet exemple, la réponse à cette question est oui, puisque les composantes de  $\overline{K_0(F)}$  qui ont la dimension plus petite que  $\max \dim K_0(F)$ , c'est-à-dire :  $0\alpha_1, 0\alpha_2, 0\alpha_3$  (de dimension 1) et 0 (de dimension 0) sont toutes dans  $S_F$ .

4) Dans cet exemple, l'ensemble  $K_0(F)$  n'est pas lisse. Il y a un point singulier, c'est le point 0. Mais  $K_0(F) \setminus S_F$  est lisse, puisque  $K_0(F) \setminus S_F = K_0(F) \setminus (0\alpha_1 \cup 0\alpha_2)$ . Donc, même si nous ne pouvons pas stratifier l'ensemble  $K_0(F)$ , nous pouvons stratifier l'ensemble  $S_F \cup K_0(F)$ .

## 5.2 Stratification de l'ensemble $K_0(F)$

Inspirés par l'exemple ci-dessus, nous pouvons énoncer une propriété de l'ensemble  $K_0(F)$  :

**Propriété 5.2.1.** *En général, l'ensemble  $K_0(F)$  n'est pas fermé.*

De plus, nous avons :

**Propriété 5.2.2.** *1) En général, l'ensemble  $K_0(F)$  n'est pas de dimension pure.*

*2) En général,  $K_0(F)$  n'est pas lisse.*

**Proposition 5.2.3.** *Soit  $F : \mathbb{C}_x^n \rightarrow \mathbb{C}_\alpha^n$  une application polynomiale, alors il existe une stratification naturelle de  $\mathbb{C}_x^n$  compatible avec  $SingF$  et il existe une stratification de  $F(\mathbb{C}_x^n)$  compatible avec la partition de  $K_0(F)$ .*

*Démonstration.* Soit  $J_F(x)$  le déterminant jacobien de  $F$  au point  $x$ . Considérons les sous-ensembles

$$V^i := \{x \in \mathbb{C}_x^n \text{ tel que } \text{Rang}(J_F(x)) = i\}.$$

Alors  $\dim(V^i) = i$  et

$$V^n = \mathbb{C}_x^n \setminus SingF,$$

$$SingF = \bigcup_{i=0}^{n-1} V^i.$$

En général,  $\{V^i\}$  n'est pas une partition de  $\mathbb{C}_x^n$ . Cependant nous pouvons subdiviser les ensembles  $V^i$  de façon à définir une partition de  $\mathbb{C}_x^n$  compatible avec  $SingF$ . Nous faisons cela comme suit :

1) Subdivisons chaque  $V^i$  en composantes lisses, irréductibles  $V_j^i$  de dimension pure.

2) Considérons maintenant :

$$V^n := V^n = \mathbb{C}_x^n \setminus SingF.$$

Pour chaque  $0 \leq i < n$ , alors  $V_l^i$  est une composante lisse, irréductible de dimension pure de :

$$\left( \left( \bigcup_{j \neq k} (V_j^{i+1} \cap V_k^{i+1}) \right) \bigcup_j V_j^i \right) \setminus \left( \left( \bigcap_{j \neq k} (V_j^{i+1} \cap V_k^{i+1}) \right) \bigcap_j V_j^i \right).$$

Alors  $\{V_j^i\}_{i=0, \dots, n}$  est une bonne stratification de  $\mathbb{C}_x^n$ , c'est-à-dire qu'elle satisfait la condition de frontière.

Définissons maintenant :

$$W_j^{i,k} := F(\{x \in V_j^i : \text{Rang } J_F|_{T_x V_j^i} = k\}).$$

Alors, par le théorème des fonctions implicites,  $W_j^{i,k}$  est une sous-variété lisse de dimension  $k$  de  $F(\mathbb{C}_x^n)$ . Considérons maintenant

$$W_j^{i,k} := \{\alpha \in W_j^{i,k} : \alpha \notin W_{j'}^{i',k'}, \forall (i', j', k') \neq (i, j, k)\}.$$

Alors  $\{W_j^{i,k}\}$  est une partition de  $F(\mathbb{C}_x^n)$  par des variétés lisses compatible avec la partition de  $K_0(F)$ .  $\square$

L'existence de la stratification de  $S_F \cup K_0(F)$  est justifiée par le fait que  $S_F \cup K_0(F)$  est fermé :

**Proposition 5.2.4.** *L'ensemble  $S_F \cup K_0(F)$  est fermé.*

Pour prouver cette proposition, nous allons montrer les lemmes suivants :

**Lemme 5.2.5.** *Pour une application polynomiale  $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ , l'ensemble des solutions de l'équation  $|J_F(x)| = 0$  est fermé.*

*Démonstration.* Considérons une suite  $\{x_k\}$  contenue dans l'ensemble  $\{x \in \mathbb{C}^m : |J_F(x)| = 0\}$  telle que  $x_k$  tende vers  $x_0$ . Puisque  $F$  est une application polynomiale,  $|J_F(x)|$  est aussi une application polynomiale et  $|J_F(x)|$  est continue. Alors  $|J_F(x_k)|$  tend vers  $|J_F(x_0)|$ . Puisque  $|J_F(x_k)| = 0$  pour tout  $x_k$ , nous avons  $|J_F(x_0)| = 0$ . Donc  $x_0$  est dans l'ensemble  $\{x : |J_F(x)| = 0\}$ . L'ensemble des solutions de l'équation  $|J_F(x)| = 0$  est donc fermé.  $\square$

**Lemme 5.2.6.** *L'ensemble  $\overline{K_0(F)} \setminus K_0(F)$  est contenu dans l'ensemble  $S_F$ .*

*Démonstration.* Soit  $a \in \overline{K_0(F)} \setminus K_0(F)$  alors  $a \in \overline{K_0(F)}$  mais  $a \notin K_0(F)$ . Il existe une suite  $\{a_k\} \subset K_0(F)$  telle que  $a_k$  tend vers  $a$ . Alors il existe une suite  $\{x_k\} \subset \{x : |J_F(x)| = 0\}$  telle que  $F(x_k) = a_k$ , pour tout  $k$ . Supposons que la suite  $\{x_k\}$  tende vers  $x_0$  telle que  $x_0$  ne soit pas l'infini. Par le lemme 5.2.5, l'ensemble  $\{x : |J_F(x)| = 0\}$  est fermé, donc  $x_0$  est dans l'ensemble  $\{x : |J_F(x)| = 0\}$ . Par ailleurs, puisque  $F$  est une application polynomiale alors  $F(x_k)$  tend vers  $F(x_0)$ . Donc  $a_k$  tend vers  $F(x_0)$ . Mais  $a_k$  tend vers  $a$  alors  $a = F(x_0)$ . Donc  $a \in K_0(F)$ , d'où la contradiction.  $\square$

Nous prouvons maintenant la proposition 5.2.4.

*Démonstration.* Par la proposition 2.3.1, page 34, l'ensemble  $S_F$  est l'image de l'ensemble  $(\overline{\text{graphe } F} \setminus \text{graphe } F)$  par la projection canonique  $\pi_2$ , où  $\pi_2 : \mathbb{P}\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Donc l'ensemble  $S_F$  est fermé. De plus, nous avons

$$\overline{K_0(F)} \cup S_F = K_0(F) \cup (\overline{K_0(F)} \setminus K_0(F)) \cup S_F.$$

D'après le lemme 5.2.6, nous avons  $\overline{K_0(F)} \setminus K_0(F) \subset S_F$ , donc  $S_F \cup K_0(F) = \overline{K_0(F)} \cup S_F$ . L'ensemble  $S_F \cup K_0(F)$  est donc fermé.  $\square$

De la proposition ci-dessus et de sa preuve, nous tirons les remarques suivantes :

**Remarque 5.2.7.** L'ensemble  $K_0(F)$  n'est pas fermé, donc nous ne pouvons pas définir une stratification de l'ensemble  $K_0(F)$  qui satisfait la condition de frontière. Mais l'ensemble  $S_F \cup K_0(F)$  étant fermé, nous pouvons donc définir une stratification de l'ensemble  $S_F \cup K_0(F)$ .

**Remarque 5.2.8.** Nous avons déjà défini la façon d'une stratification de l'ensemble  $S_F$ , donc si nous pouvons montrer que l'ensemble  $K_0(F) \setminus S_F$  est lisse, alors nous pouvons facilement stratifier l'ensemble  $S_F \cup K_0(F)$ . Le lemme 5.2.6 nous dit que  $K_0(F) \setminus K_0(F)$  est contenu dans l'ensemble  $S_F$ . Mais cela ne nous permet pas de dire que l'ensemble  $K_0(F) \setminus S_F$  est lisse, puisqu'il n'est pas clair que les points singuliers de l'ensemble  $K_0(F)$  sont contenus dans  $\overline{K_0(F)}$ , comme dans l'exemple suivant :

**Exemple 5.2.9.** Soit l'application polynomiale  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  telle que

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^3 - x_1x_2x_3, x_2x_3, x_3).$$

1) Déterminons l'ensemble  $S_F$  : supposons que  $a \in S_F$ , alors il existe une suite  $\{\xi_k\} = \{(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})\}$  tendant vers l'infini telle que  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$ .

i) Si  $x_{1,k}$  tend vers l'infini, alors  $x_{2,k}x_{3,k}$  tend vers l'infini puisque  $x_{1,k}^3 - x_{1,k}x_{2,k}x_{3,k}$  ne tend pas vers l'infini, d'où la contradiction.

ii) Si  $x_{1,k}$  tend vers un nombre complexe  $\lambda$  non nul, alors  $x_{1,k}x_{3,k}$  ne tend pas vers l'infini puisque  $x_{1,k}^3 - x_{1,k}x_{2,k}x_{3,k}$  ne tend pas vers l'infini. Mais  $x_{3,k}$  ne tend pas vers l'infini, donc  $x_{2,k}$  tend vers l'infini et  $x_{3,k}$  tend vers 0. La suite  $\{\xi_k\} = \{(\lambda, k\mu, \frac{\nu}{k})\}$  satisfait  $F(\xi_k) \rightarrow (\lambda^3 - \lambda\mu\nu, \mu\nu, 0)$ . Donc nous avons  $S_{F_1} = \{\alpha_3 = 0\}$ .

iii) Si  $x_{1,k}$  tend vers 0, puisque  $x_{3,k}$  ne peut pas tendre vers l'infini, alors  $x_{2,k}$  doit tendre vers l'infini et  $x_{3,k}$  tend vers 0. La suite  $\{\xi_k\} = \{(\frac{\lambda}{k}, \mu k, \frac{\nu}{k})\}$  satisfait  $F(\xi_k) \rightarrow (0, \mu\nu, 0) \in S_{F_1}$ .

L'ensemble  $S_F$  est donc le plan  $\{\alpha_3 = 0\}$ .

2) Montrons que l'application polynomiale  $F$  est dominante : soit un point  $a \in \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3 \setminus S_F$ , alors  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , où  $\alpha_3 \neq 0$ . Déterminons les solutions de  $F(x_1, x_2, x_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , c'est-à-dire

$$\alpha_1 = x_1^3 - x_1x_2x_3, \quad \alpha_2 = x_2x_3, \quad \alpha_3 = x_3. \quad (5.2.10)$$

Puisque  $\alpha_3 \neq 0$  et  $x_3 = \alpha_3$  alors  $x_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}$ . L'équation  $\alpha_1 = x_1^3 - x_1x_2x_3$  devient  $\alpha_1 = x_1^3 - x_1\alpha_2$  qui a toujours des solutions. Donc le système (5.2.10) a toujours des solutions. L'application  $F$  est donc dominante.

3) Déterminons l'ensemble  $K_0(F)$  : nous avons

$$J_F = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - x_2x_3 & -x_1x_3 & -x_1x_2 \\ 0 & x_3 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|J_F(x_1, x_2, x_3)| = x_3(3x_1^2 - x_2x_3).$$

Si  $|J_F(x_1, x_2, x_3)| = 0$  alors nous avons  $x_3 = 0$  ou  $3x_1^2 = x_2x_3$ .

Si  $x_3 = 0$  alors nous avons  $F(x_1, x_2, 0) = (x_1^3, 0, 0)$  donc l'axe  $0\alpha_1$  est contenu dans  $K_0F$ .

Si  $3x_1^2 = x_2x_3$  alors  $F(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1^3, 3x_1^2, x_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ . Donc  $K_0(F)$  contient la surface  $(\mathcal{S}) : (27\alpha_1^2 = 4\alpha_2^3, \alpha_3 = t \in \mathbb{C})$ .

Nous voyons que  $K_0(F) \setminus S_F$  n'est pas lisse et l'axe  $0\alpha_3 \setminus \{0\}$  en est la partie singulière.

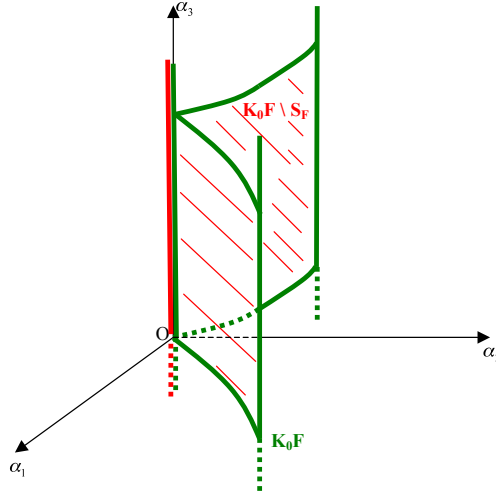


FIGURE 5.45 – Un exemple pour l'ensemble le quel  $K_0(F) \setminus S_F$  n'est pas lisse

**Remarque 5.2.11.** Dans l'exemple 5.1.1, nous voyons que l'ensemble  $S_F \cup K_0(F)$  est de dimension pure. L'ensemble  $K_0(F) \setminus S_F$  est aussi de dimension pure. Une question naturelle est de savoir si ces propriétés sont toujours vraies : Est-ce que les ensembles  $S_F \cup K_0(F)$  et  $K_0(F) \setminus S_F$  sont de dimension pure ? Pour prouver cela, nous devons prouver que les composantes de l'ensemble  $K_0(F)$  qui ont une dimension plus petite que  $\dim S_F$  sont contenues dans  $S_F$ . Si  $F$  n'est pas dominante, cela n'est plus vrai, comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 5.2.12.** Soit l'application polynomiale  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  telle que

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - x_2x_3, x_2 - x_3, x_1 - x_3).$$

i) L'ensemble  $S_F$  est réduit au point  $0 = (0, 0, 0)$ , par exemple la suite  $\{(k, k, k)\}$  tend vers l'infini et son image tend vers 0.



ii) L'application  $F$  n'est pas dominante : soit un point  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus S_F$ , le système d'équation :

$$x_1^2 - x_2x_3 = \alpha_1, \quad x_2 - x_3 = \alpha_2, \quad x_1 - x_3 = \alpha_3$$

donne l'équation  $(2\alpha_3 - \alpha_2)x_3 = \alpha_1 - \alpha_3^2$ , en remplaçant  $x_1 = x_3 + \alpha_3$  et  $x_2 = x_3 + \alpha_2$  dans la première équation. Soit un point  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  tel que  $\alpha_2 = 2\alpha_3, \alpha_1 \neq \alpha_3^2$ , par exemple  $a = (0, 2, 1)$ , alors le point  $a$  n'est ni dans  $F(\mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3)$ , ni dans  $S_F$ . Donc le point  $a$  n'est pas dans  $\overline{F(\mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3)} = S_F \cup F(\mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3)$ .

iii) Déterminons l'ensemble  $K_0(F)$  :

Nous avons  $|J_F(x_1, x_2, x_3)| = -2x_1 + x_2 + x_3$ . Soit  $|J_F(x_1, x_2, x_3)| = 0$ , alors nous avons

$$x_1 = \frac{x_2 + x_3}{2}.$$

Cela implique

$$F\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, x_2, x_3\right) = \frac{1}{4} \left( (x_2 - x_3)^2, 4(x_2 - x_3), 2(x_2 - x_3) \right).$$

Donc, si  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in K_0(F)$ , nous avons  $\alpha_1 = 8\alpha_2\alpha_3$ . Alors  $K_0(F)$  est un paraboloïde hyperbolique ( $P$ ) dont l'équation est  $\alpha_1 = 8\alpha_2\alpha_3$ .

iv) L'ensemble  $K_0(F)$  est une paraboloïde alors que l'ensemble  $S_F$  est seulement le point 0 et  $S_F \subset K_0(F)$ . La raison pour laquelle  $F$  n'est pas dominante est que l'ensemble  $S_F$  n'est pas une hypersurface (voir théorème 2.3.2, page 34).

Donc nous avons la conjecture suivante :

**Conjecture 5.2.13.** *Soit  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application polynomiale dominante, alors les ensembles  $S_F \cup K_0(F)$  et  $K_0(F) \setminus S_F$  sont de dimension pure.*

Nous prouvons cette conjecture pour la classe d'exemples ci-dessous :

**Exemple 5.2.14.** Soit  $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  une application polynomiale dominante telle que

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, x_3) &:= x_1x_2 + x_1, \\ F_2(x_1, x_2, x_3) &:= (x_2x_3)^\theta + lx_1^2 + rx_1x_2, \\ F_3(x_1, x_2, x_3) &:= x_1^2x_2^2 + s(x_2x_3)^\theta + (sl - 1)x_1^2 + (k + 1)x_1 + kx_1x_2, \end{aligned}$$

avec  $\theta \geq 2$ .

1) Déterminons l'ensemble  $S_F$  : supposons que  $a \in S_F$ , alors il existe une suite  $\{\xi_k\} = \{(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})\}$  tendant vers l'infini et telle que  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$ . Nous avons les deux cas possibles suivants :

i)  $x_{1,k}$  tend vers 0,  $x_{2,k}$  tend vers l'infini et  $x_{3,k}$  tend vers 0 telles que  $x_{1,k}x_{2,k}$  tend vers un nombre complexe  $\lambda$  et  $x_{2,k}x_{3,k}$  tend vers un nombre complexe  $\mu$ . Alors  $F(\xi_k)$  tend vers :

$$(\lambda, \mu^\theta + r\lambda, \lambda^2 + s\mu^\theta + k\lambda).$$

Donc  $S_F$  contient la surface  $S_{F_1}$  d'équation :

$$\alpha_3 = s\alpha_2 + \alpha_1^2 + (k - rs)\alpha_1. \quad (5.2.15)$$

ii)  $x_{1,k}$  tend vers un nombre complexe  $\lambda$ ,  $x_{2,k}$  tend vers 0 et  $x_{3,k}$  tend vers l'infini telles que  $x_{2,k}x_{3,k}$  tend vers un nombre complexe  $\mu$ . Alors  $F(\xi_k)$  tend vers :

$$(\lambda, \mu^\theta + l\lambda^2, s\mu^\theta + (sl - 1)\lambda^2 + (k + 1)\lambda).$$

Donc  $S_F$  contient la surface  $S_{F_2}$  d'équation :

$$\alpha_3 = s\alpha_2 - \alpha_1^2 + (k + 1)\alpha_1. \quad (5.2.16)$$

2) Déterminons l'ensemble  $K_0(F)$  : nous avons

$$|J_F(x_1, x_2, x_3)| = x_1x_2x_3^{\theta-1}(rs\theta + \theta - 2\theta x_1 - 2\theta x_1x_2).$$

Si  $|J_F(x_1, x_2, x_3)| = 0$ , alors nous avons  $x_1 = 0$  ou  $x_2 = 0$  ou  $x_3 = 0$  ou  $x_1 + x_1x_2 = \frac{rs+1}{2}$ .

i) Si  $x_1 = 0$ , alors nous avons  $F(0, x_2, x_3) = (0, (x_2x_3)^\theta, s(x_2x_3)^\theta)$ . Donc  $K_0(F)$  contient la droite  $(K_0(F))_1$  d'équation :

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_3 = s\alpha_2. \quad (5.2.17)$$

Nous voyons que  $(K_0(F))_1$  est contenu dans  $S_{F_1}$ .

ii) Si  $x_2 = 0$ , alors nous avons  $F(x_1, 0, x_3) = (x_1, lx_1^2, (sl - 1)x_1^2 + (k + 1)x_1)$ . Donc  $K_0(F)$  contient la surface  $(K_0(F))_2$  d'équation :

$$\alpha_3 = s\alpha_2 - \alpha_1^2 + (k + 1)\alpha_1. \quad (5.2.18)$$

iii) Si  $x_3 = 0$ , nous avons

$$F(x_1, x_2, 0) = (x_1x_2 + x_1, lx_1^2 + rx_1x_2, x_1^2x_2^2 + (sl - 1)x_1^2 + (k + 1)x_1 + kx_1x_2).$$

Donc  $K_0(F)$  contient la droite  $(K_0(F))_3$  d'équation :

$$\alpha_1 = \frac{rs + 1}{2}, \quad \alpha_3 = s\alpha_2 + (k - rs)\frac{rs + 1}{2} + \frac{(rs)^2}{4}. \quad (5.2.19)$$

Nous voyons que  $(K_0(F))_3$  est contenu dans  $S_{F_1}$ .

*iv)* Si  $x_1 + x_1x_2 = \frac{rs+1}{2}$ , alors  $F(x_1, x_2, x_3)$  est égal à :

$$\left( \frac{rs+1}{2}, (x_2x_3)^\theta + lx_1^2 + rx_1x_2, (x_1x_2)^2 + s(x_2x_3)^\theta + (sl-1)x_1^2 + (k+1)x_1 + kx_1x_2 \right).$$

Donc  $K_0(F)$  contient la droite  $(K_0(F))_4$  d'équation :

$$\alpha_1 = \frac{rs+1}{2}, \quad \alpha_3 = s\alpha_2 + (k-rs)\frac{rs+1}{2} + \frac{(rs)^2}{4}. \quad (5.2.20)$$

Nous voyons que  $(K_0(F))_4 \equiv (K_0(F))_3$  est contenu dans  $S_{F_1}$ .

Donc pour cette classe d'exemples, les ensembles  $S_F \cup K_0(F)$  et  $K_0(F) \setminus S_F$  sont de dimension pure.

### 5.3 Stratification de l'ensemble $S_F \cup K_0(F)$

Pour stratifier l'ensemble  $S_F \cup K_0(F)$ , nous pouvons penser à stratifier les ensembles  $S_F$  et  $K_0(F)$ . En fait, l'ensemble  $K_0(F)$  n'est pas fermé mais nous venons de prouver que l'ensemble  $S_F \cup K_0(F)$  est fermé. De plus, d'après l'exemple 5.2.9, page 148, l'ensemble  $K_0(F) \setminus S_F$  n'est pas lisse. Donc la question naturelle est : *Est-ce qu'il existe une stratification de l'ensemble  $S_F \cup K_0(F)$  compatible avec les partitions de  $K_0(F)$  et  $S_F$  ?*

**Proposition 5.3.1.** *Il existe une stratification de l'ensemble  $S_F \cup K_0(F)$  compatible avec les partitions de  $K_0(F)$  et  $S_F$ .*

*Démonstration.* D'après la proposition 5.2.4 et sa preuve, l'ensemble  $S_F \cup K_0(F)$  est fermé et

$$S_F \cup \overline{K_0(F)} = S_F \cup K_0(F).$$

Puisque  $S_F$  et  $\overline{K_0(F)}$  sont stratifiés, alors pour stratifier l'ensemble  $S_F \cup K_0(F)$ , nous devons stratifier l'ensemble  $S_F \cap \overline{K_0(F)}$ . Supposons que  $\Sigma_{S_F}$  soit une stratification de  $S_F$  et  $\Sigma_{\overline{K_0(F)}}$  une stratification de  $\overline{K_0(F)}$ . Une stratification de  $S_F \cap \overline{K_0(F)}$  est donnée par :

$$\Sigma_{S_F} \cap \Sigma_{\overline{K_0(F)}} = \{X \cap X' : X \in \Sigma_{S_F}, X' \in \Sigma_{\overline{K_0(F)}}\},$$

si  $\Sigma_{S_F}$  et  $\Sigma_{\overline{K_0(F)}}$  sont transverses (voir [Tr], page 4), ce qui nous conduit au résultat.  $\square$

**Corollaire 5.3.2.** *Si  $F : \mathbb{C}_x^n \rightarrow \mathbb{C}_\alpha^n$  est dominante, alors il existe une stratification naturelle de  $\mathbb{C}_\alpha^n$  par des variétés lisses compatible avec la stratification de  $S_F$  et la partition de  $K_0(F)$ .*

*Démonstration.* Puisque  $F$  est dominante, nous avons  $\overline{F(\mathbb{C}_x^n)} = \mathbb{C}_\alpha^n$ . Nous avons aussi  $\overline{F(\mathbb{C}_x^n)} = S_F \cup F(\mathbb{C}_x^n)$ . D'après la proposition 5.3.1, nous avons une stratification de  $S_F \cup K_0(F)$  compatible avec les partitions de  $K_0(F)$  et  $S_F$ , une stratification de  $\overline{F(\mathbb{C}_x^n)}$  compatible avec  $S_F$  et  $\overline{K_0(F)}$ .  $\square$

L'exemple suivant éclaire la proposition 5.3.1 précédente :

**Exemple 5.3.3.** Soit l'application polynomiale  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  telle que

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3).$$

1) Déterminons l'ensemble  $S_F$  : Supposons que  $a \in S_F$ , alors il existe une suite  $\{\xi_k\} = \{(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})\}$  tendant vers l'infini et telle que  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$ .

i) Si  $x_{1,k}$  tend vers un nombre complexe non nul  $\lambda$ , alors  $x_{2,k}$  et  $x_{3,k}$  ne tendent pas vers l'infini puisque  $x_{1,k}x_{2,k}$  et  $x_{1,k}x_{3,k}$  ne tendent pas vers l'infini, d'où la contradiction.

ii) Si  $x_{1,k}$  tend vers l'infini, alors  $x_{3,k}$  tend vers 0 puisque  $x_{1,k}x_{3,k}$  ne tend pas vers l'infini. Donc  $x_{2,k}$  tend vers l'infini puisque  $x_{1,k}^2 - x_{1,k}x_{2,k} = x_{1,k}(x_{1,k} - x_{2,k})$  ne tend pas vers l'infini. D'autre part  $x_{1,k} = x_{2,k}$  puisque  $x_{1,k}^2 - x_{1,k}x_{2,k}$  ne tend pas vers l'infini et toutes les deux suites  $\{x_{1,k}\}$  et  $\{x_{2,k}\}$  tendent vers l'infini. Considérons la suite  $\{\xi_k\} = \{(k\lambda, k\lambda, \frac{\nu}{k})\}$ , alors  $F(\xi_k)$  tend vers  $(0, \lambda\nu, \lambda\nu)$ . Donc  $S_{F_1} = \{(0, \alpha_2, \alpha_2)\}$  qui est une droite, appelée  $l$ .

iii) Si  $x_{1,k}$  tend vers 0, il y a trois possibilités suivantes :

+ Si  $x_{3,k}$  tend vers un nombre complexe non nul  $\nu$ , alors  $x_{2,k}$  tend vers l'infini, donc  $x_{2,k}x_{3,k}$  tend vers l'infini, d'où la contradiction.

+ Si  $x_{3,k}$  tend vers 0, alors  $x_{2,k}$  tend vers l'infini. Considérons la suite  $\{\xi_k\} = \{(\frac{\lambda}{k}, k\mu, \frac{\nu}{k})\}$ , alors  $F(\xi_k)$  tend vers  $(-\lambda\mu, 0, \mu\nu)$ . Donc l'ensemble  $S_{F_2} = \{(\alpha_1, 0, \alpha_3)\}$  est le plan  $\{\alpha_2 = 0\}$ .

Pour un point  $a \in S_{F_2}$ , nous avons  $\Xi(a) = \{(2)[1, 3]\}$ .

+ Si  $x_{3,k}$  tend vers l'infini, alors  $x_{2,k}$  tend vers 0 puisque  $x_{2,k}x_{3,k}$  ne tend pas vers l'infini. Considérons la suite  $\{\xi_k\} = \{(\frac{\lambda}{k}, \frac{\mu}{k}, k\nu)\}$ , alors  $F(\xi_k)$  tend vers  $(0, \lambda\nu, \mu\nu)$ . Donc l'ensemble  $S_{F_3} = \{(0, \alpha_2, \alpha_3)\}$  est le plan  $\{\alpha_1 = 0\}$ .

Pour un point  $a \in S_{F_3}$ , nous avons  $\Xi(a) = \{(3)[1, 2]\}$ .

Puisque  $S_{F_1} \subset S_{F_3}$ , l'ensemble  $S_F$  est égal à  $S_{F_2} \cup S_{F_3} = \{\alpha_1 = 0\} \cup \{\alpha_2 = 0\}$ . Une stratification de l'ensemble  $S_F$  est donc donnée par :

$$S_F \supset l \cup 0\alpha_3 \supset \{0\} \supset \emptyset.$$

2) Montrons que l'application polynomiale  $F$  est dominante : Soit un point  $a \in \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3 \setminus S_F$ , alors  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  telle que  $\alpha_1 \neq 0$  et  $\alpha_2 \neq 0$ . Déterminons les solutions de l'équation  $F(x_1, x_2, x_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , c'est-à-dire

$$\alpha_1 = x_1^2 - x_1x_2, \quad \alpha_2 = x_1x_3, \quad \alpha_3 = x_2x_3. \quad (5.3.4)$$

Nous avons  $x_1 \neq 0$  et  $x_3 \neq 0$  puisque  $x_1 x_3 = \alpha_2 \neq 0$ . Par ailleurs,  $x_1 \neq x_2$  puisque  $x_1^2 - x_1 x_2 \neq 0$ . Si  $\alpha_2 = \alpha_3$ , alors nous avons  $x_1 = x_2$  et donc  $\alpha_1 = 0$ , d'où la contradiction. Donc nous avons aussi  $\alpha_2 \neq \alpha_3$ .

i) Si  $\alpha_3 = 0$ , alors nous avons  $x_2 = 0$  puisque  $x_2 x_3 = 0$  et  $x_3 \neq 0$ . Donc,  $x_1^2 = \alpha_1 \neq 0$ . Le système d'équations (5.3.4) a toujours des solutions  $(\sqrt{\alpha_1}, 0, \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}})$ .

ii) Si  $\alpha_3 \neq 0$ , alors les trois coordonnées  $x_1$  et  $x_2$  et  $x_3$  ne sont pas nulles. Remplaçons  $x_1 = \frac{\alpha_2}{x_3}$  et  $x_2 = \frac{\alpha_3}{x_3}$  dans l'équation  $x_1^2 - x_1 x_2 = \alpha_1$ , nous obtenons l'équation :  $\alpha_1 x_3^2 = \alpha_2^2 - \alpha_2 \alpha_3$ . Cette équation admet toujours une solution  $x_3 \neq 0$  puisque  $\alpha_2 \neq 0$  et  $\alpha_2 \neq \alpha_3$ . Le système d'équations (5.3.4) admet donc toujours des solutions.

3) Déterminons l'ensemble  $K_0(F)$  : Nous avons  $|J_F(x_1, x_2, x_3)| = 2x_1 x_3 (x_1 - x_2)$ . Si  $|J_F(x_1, x_2, x_3)| = 0$  alors nous avons  $x_1 = 0$  ou  $x_3 = 0$  ou  $x_1 = x_2$ .

Si  $x_1 = 0$ , alors nous avons  $F(0, x_2, x_3) = (0, 0, x_2 x_3)$ , et  $(K_0(F))_1 = \{(0, 0, \alpha_3)\} \subset S_F$ .

Si  $x_3 = 0$ , alors nous avons  $F(x_1, x_2, 0) = (x_1^2 - x_1 x_2, 0, 0)$ , et  $(K_0(F))_2 = \{(\alpha_1, 0, 0)\} \subset S_F$ .

Si  $x_1 = x_2$ , alors nous avons  $F(x_1, x_2, 0) = (0, x_1 x_3, x_1 x_3)$ , et  $(K_0(F))_3 = \{(\alpha_1, 0, 0)\} \subset S_F$ .

Nous avons donc  $S_F \cup K_0(F) = S_F$ .

4) Stratification de l'ensemble  $S_F \cup K_0(F)$  : Une stratification de l'ensemble  $S_F \cup K_0(F)$  est donc donnée par une stratification de l'ensemble  $S_F$ , correspondant à la filtration :

$$S_F \supset l \cup 0\alpha_3 \supset \{0\} \supset \emptyset.$$

La strate  $S_F \setminus (l \cup 0\alpha_3)$  a deux composantes :

la composante  $X_1 = \{\alpha_1 = 0\} \setminus (l \cup 0\alpha_3)$  où  $\Xi(a) = \{(3)[1, 2]\}$  pour tout  $a \in X_1$ ;

la composante  $X_2 = \{\alpha_2 = 0\} \setminus (l \cup 0\alpha_3)$  où  $\Xi(a) = \{(2)[1, 3]\}$  pour tout  $a \in X_2$ .

La strate  $(l \cup 0\alpha_3) \setminus \{0\}$  a deux composantes :

la composante  $l_1 = l \setminus \{0\}$  où  $\Xi(a) = \{(1, 2)[3]\}$  pour un point  $a \in l_1$ ;

la composante  $l_2 = 0\alpha_3 \setminus \{0\}$  où  $\Xi(a) = \{(2)[1, 3], (3)[1, 2]\}$  pour un point  $a \in l_1$ .

Enfin, avec la strate  $\{0\}$ , nous avons  $\Xi(0) = \{(1, 2)[3], (2)[1, 3], (3)[1, 2]\}$ .

## 5.4 Sur les stratifications des ensembles $B(F)$ , $K(F)$ , $B_\infty(F)$ , $K_\infty(F)$ et de l'ensemble de test

### 5.4.1 Sur les stratifications des ensembles $B(F)$ , $K(F)$ , $B_\infty(F)$ et $K_\infty(F)$

Rappelons d'abord les définitions des ensembles  $B(F)$ ,  $K(F)$ ,  $B_\infty(F)$  et  $K_\infty(F)$  pour une application polynomiale  $F : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}$  où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Il y a plus de

quarante ans, R. Thom a prouvé que  $F$  est une fibration  $C^\infty$  en dehors d'un ensemble fini. Le plus petit tel ensemble est appelé l'ensemble de bifurcation de  $F$  et est noté  $B(F)$ . En général, l'ensemble  $B(F)$  est plus grand que l'ensemble  $K_0(F)$ . Il contient aussi l'ensemble des points de bifurcations à l'infini  $B_\infty(F)$ . De manière précise, l'ensemble  $B_\infty(F)$  consiste en les points où l'application  $F$  n'est pas une fibration localement triviale à l'infini (*i.e.* en dehors d'une grande boule). Pour contrôler l'ensemble  $B_\infty(F)$ , nous utilisons l'ensemble *des valeurs critiques asymptotiques de  $F$*  :

$$K_\infty(F) = \{\alpha \in \mathbb{K} : \exists \xi_k \subset \mathbb{K}^m, |\xi_k| \rightarrow \infty \\ \text{telle que } F(\xi_k) \rightarrow \alpha \text{ et } |\xi_k| |dF(x_k)| \rightarrow 0\}.$$

Soit

$$K(F) := K_0(F) \cup K_\infty(F).$$

Nous avons les faits suivants :

- 1)  $K_\infty(F) \subset S_F$ .
- 2) Dans [Pa1, Pa2], Parusiński a prouvé qu'en général,  $B_\infty(F) \subset K_\infty(F)$ .
- 3)  $B(F) \subset K(F)$  (voir par exemple [JK]).

Nous avons déjà construit les stratifications des ensembles  $S_F$  et  $K_0(F)$ , nous avons donc des stratifications des ensembles  $K_\infty(F)$ ,  $K(F)$ ,  $B_\infty(F)$  et  $B(F)$ . Il est connu que dans le cas où  $k = 1$ , c'est-à-dire, pour une l'application  $F : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}$ , ces ensembles sont finis. Le cas intéressant est donc le cas où  $k > 1$ .

Soit  $F : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ , où  $m, n > 1$  une application polynomiale. L'ensemble  $K_\infty(F)$  est défini par

$$K_\infty(F) = \{\alpha \in \mathbb{K}^n : \exists \xi_k \subset \mathbb{K}^m, |\xi_k| \rightarrow \infty \\ \text{telle que } F(\xi_k) \rightarrow \alpha \text{ et } (1 + |\xi_k|) \nu(dF(x_k)) \rightarrow 0\}$$

où  $\nu$  est la fonction de Rabier, c'est-à dire la distance à l'ensemble singulier des opérateurs :

$$\nu(dF) := \text{dist}(dF, \Sigma) = \inf_{G \in \Sigma} |dF - dG|,$$

$$\Sigma := \{dG, G : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n \text{ telle que } dG \text{ n'est pas surjective}\}.$$

Dans ce cas, l'ensemble  $B(F)$  de bifurcation de  $F$  est le plus petit ensemble fermé  $Y$  tel que

$$F : \mathbb{K}^m \setminus F^{-1}(Y) \rightarrow \mathbb{K}^n \setminus Y$$

est une fibration sur chaque composante connexe de  $\mathbb{K}^n \setminus Y$ . De la même manière que dans le cas d'une application  $F : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}$ , nous avons les ensembles  $K(F)$  et  $B_\infty(F)$ . En général, pour le cas où  $m, n > 1$ , les ensembles  $K_\infty(F)$ ,  $K(F)$ ,  $B_\infty(F)$  et  $B(F)$  ne sont pas finis, il sont des variétés singulières.

Pour le cas complexe des applications polynomiales  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , nous avons déjà la stratification de  $S_F$  définie par les façons, nous avons donc des stratifications des ensembles  $K_\infty(F)$ ,  $K(F)$ ,  $B_\infty(F)$  et  $B(F)$ , définies par les façons. Par ailleurs, nous conjecturons que :

**Conjecture 5.4.1.** *La stratification de l'ensemble  $K_\infty(F)$  définie par les façons est plus fine que la stratification de  $S_F$  définie par les façons.*

Pour le cas réel, dans [KPS], K. Kurdyka, P. Orro et S. Simon ont prouvé les résultats suivants :

**Théorème 5.4.2.** [KPS] *Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application semi-algébrique, alors  $S_F = K_\infty(F)$ .*

**Théorème 5.4.3.** [KPS] *Soit  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n < m$  une application  $\mathcal{C}^1$  semi-algébrique. Supposons que l'ensemble des points réguliers de  $F$  est dense et  $f^{-1}(\alpha)$  est compact pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{K}_0(F)$ , alors  $S_F = K_\infty(F)$ .*

Nous conjectons que la stratification de  $S_F$  définie par les façons existe bien pour le cas réel, nous obtenons donc des stratifications pour les applications  $F$  des théorèmes 5.4.2 et 5.4.3 :

**Conjecture 5.4.4.** *Il existe une stratification de  $S_F$ , définie par les façons, pour une application polynomiale  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ .*

## 5.4.2 Sur les stratifications de l'ensemble de test

L'ensemble de test (appelé *testing set* dans [J2]) des applications polynomiales est défini par Jelonek de la manière suivante :

**Définition 5.4.5.** [J2] *Une variété algébrique  $S \subset Y$  est appelé ensemble de test des applications polynomiales  $F : X \rightarrow Y$  si pour toute application polynomiale génériquement finie  $F : X \rightarrow Y$ , si  $\text{res}_{F^{-1}(S)} F : F^{-1}(S) \rightarrow S$  est propre, alors  $F$  est propre.*

Dans [J2], Jelonek a prouvé les résultats importants suivants concernant l'ensemble de test :

1) Soit  $X$  une variété semi-affine de dimension  $n$ , qui est dominée par  $\mathbb{C}^n$  (resp.  $X = \mathbb{C}^n$ ). Soient  $S_1, \dots, S_m$  des hypersurfaces dans  $\mathbb{C}^m$ , qui n'ont pas de points communs à l'infini. Alors  $S = \cup_{i=1}^m S_i$  est l'ensemble de test des applications polynomiales  $X \rightarrow \mathbb{C}^m$ .

2) Soit  $X$  une variété semi-affine de dimension  $n$ , qui est dominée par  $\mathbb{C}^n$  (resp.  $X = \mathbb{C}^n$ ). Let  $T_1, T_2 \subset \mathbb{C}^n$  deux hypersurfaces lisses projectives de degrés  $d_1, d_2 > n$ ,

qui sont transverses à l'hyperplan à l'infini mais ne coïncident pas à l'infini. Alors l'union  $T = T_1 \cup T_2$  est l'ensemble de test des applications polynomiales  $F : X \rightarrow \mathbb{C}^n$ .

L'ensemble de test joue un rôle important pour vérifier si une application polynomiale est propre, sans avoir besoin de connaître l'ensemble  $S_F$ . Nous conjecturons que :

**Conjecture 5.4.6.** *Il existe une stratification, définie par les façons, de l'ensemble de test des applications polynomiales  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ .*





# Chapitre 6. Quelques observations sur l'ensemble $S_F$

Rappelons le résultat de Jelonek [J1] (voir théorème 2.3.2, page 34) : Si  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  est une application polynomiale dominante et n'est pas propre, alors l'ensemble  $S_F$  est une hypersurface  $\mathbb{C}$ -uniréglée. Nous étudions cette propriété en précisant le résultat de Jelonek dans quelques cas. En particulier, dans la section 6.2, nous donnons la liste des ensembles de Jelonek possibles, dans le cas d'une application polynomiale  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  de degré 2 et nous exhibons une "classe" d'applications correspondante à chacune de ces possibilités. Dans la section 6.3, nous étudions brièvement le cas d'une application rationnelle.

## 6.1 Cas général de $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$

**Proposition 6.1.1.** *Pour tout entier  $d$ ,  $d > 1$ , nous pouvons exhiber une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  de degré  $d$ , telle que l'ensemble de Jelonek  $S_F$  soit l'union de  $(n - 2)(d - 1) + 1$  plans parallèles donnés.*

*Démonstration.* Posons

$$\begin{aligned} F_1 &= x_1, \\ F_2 &= x_1 x_2, \\ F_h &= (x_1 - \lambda_h^1)(x_1 - \lambda_h^2) \dots (x_1 - \lambda_h^{d-1})x_h \text{ avec } h \geq 3, \end{aligned}$$

où les  $\lambda_h^i$  sont des nombres complexes tels que  $\lambda_h^i \neq \lambda_h^j$  pour tous  $i \neq j$  et  $\lambda_h^i \neq \lambda_{h'}^j$  si  $i \neq j$  ou  $h \neq h'$ . Soit  $h \geq 3$ , si  $x$  tend vers 0, alors on a  $S_{F_h}^0 = \{\alpha_1 = 0\}$  et si  $x_1 \rightarrow \lambda_h^i$  alors  $S_{F_h}^i = \{\alpha_1 = \lambda_h^i\}$ . Puisque  $\lambda_h^i \neq \lambda_h^j$  pour tous  $i \neq j$ , alors pour chaque  $h$ ,  $S_F$  contient  $1 + (d - 1)$  plans parallèles  $S_{F_h}^i$ . Puisque pour chaque  $h$ ,  $S_F$  contient toujours le plan  $\alpha_1 = 0$ , et  $3 \leq h \leq n$  et  $\lambda_h^i \neq \lambda_{h'}^j$  si  $i \neq j$  ou  $h \neq h'$ , nous en déduisons que  $S_F$  est l'union de  $(n - 2)(d - 1) + 1$  plans parallèles.  $\square$

**Exemple 6.1.2.** Dans le cas  $n = 3$  et  $d = 3$ , considérons l'application  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  donnée par

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 x_2, (x_1 - 1)(x_1 - 2)x_3).$$

Alors, l'ensemble  $S_F$  est l'union de trois plans parallèles  $\{\alpha_1 = 0\} \cup \{\alpha_1 = 1\} \cup \{\alpha_1 = 2\}$ .

**Remarque 6.1.3.** Dans la preuve de la proposition 6.1.1, si nous ne considérons pas la même coordonnée  $x_1$  dans les facteurs de l'expression des fonctions  $F_h$ , alors il existe des plans de  $S_F$  transverses aux autres.

**Exemple 6.1.4.** Soit l'application  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3, x_4)}^4 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)}^4$  définie par

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1x_2, (x_1 - 1)(x_1 - 2)x_3, (x_4 - 1)(x_4 - 2)x_3).$$

Alors l'ensemble  $S_F$  est égal à  $\{\alpha_1 = 0\} \cup \{\alpha_1 = 1\} \cup \{\alpha_1 = 2\} \cup \{\alpha_4 = 1\} \cup \{\alpha_4 = 2\}$ . Les plans  $\{\alpha_4 = 1\}$  et  $\{\alpha_4 = 2\}$  sont transverses aux plans  $\{\alpha_1 = 0\}$ ,  $\{\alpha_1 = 1\}$  et  $\{\alpha_1 = 2\}$ .

## 6.2 Cas $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$

Nous savons que si  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  est une application polynomiale dominante, alors  $S_F$  est une hypersurface. Ici, l'hypersurface peut être irréductible ou réductible et peut être un plan (de coordonnée ou non) ou une surface. Dans la suite de cette section, nous appellerons “surface” une surface qui n'est pas un plan. Nous savons aussi que, l'ensemble  $S_F$  contient au maximum trois hypersurfaces irréductibles. Dans cette section, nous voulons trouver un algorithme permettant d'explicitier une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  telle que l'ensemble  $S_F$  soit donné. Le cas où  $F$  est de degré 1 est le cas trivial, le premier degré intéressant est donc celui où le degré de  $F$  est égal à 2.

Dans ce cas, nous savons que  $S_F$  contient au maximum trois hypersurfaces. Donc  $S_F$  est de l'une des formes suivantes :

- 1) L'union au maximum de trois plans.
- 2) L'union d'un plan et d'une surface.
- 3) Une surface.
- 4) L'union de deux surfaces.
- 5) L'union de deux plans et d'une surface.
- 6) L'union de deux surfaces et d'un plan.

Dans cette section, nous nous proposons de montrer le résultat suivant :

**Théorème 6.2.1.** *L'ensemble de Jelonek d'une application polynomiale non-propre, dominante de  $\mathbb{C}^3$  dans  $\mathbb{C}^3$  et de degré 2 est l'un des 5 éléments de la liste  $\text{LS}_F$  suivante. De plus, tout élément de la liste, peut être réalisé comme ensemble de Jelonek d'une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  de degré 2.*

$\text{LS}_F : 1)$  Un plan quelconque.

2) Un paraboloïde.

3) Union d'un plan quelconque

$$(\mathcal{P}) : \quad r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3 + r_4 = 0,$$

et d'un plan

$$(\mathcal{P}') : \quad r'_1x_1 + r'_2x_2 + r'_3x_3 + r'_4 = 0,$$

où nous pouvons choisir deux des coefficients  $r'_1, r'_2, r'_3$ , le troisième ainsi que  $r'_4$  étant alors déterminés.

4) Union d'un plan quelconque

$$(\mathcal{P}) : r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3 + r_4 = 0$$

et d'un parabolöide

$$(\mathcal{S}) : r'_ix_i^2 + r'_jx_j + r'_lx_l + r'_4 = 0, \quad \{i, j, l\} = \{1, 2, 3\},$$

où nous pouvons choisir deux des coefficients  $r'_1, r'_2, r'_3$ , le troisième ainsi que  $r'_4$  étant alors déterminés.

5) Union de trois plans des formes

$$(\mathcal{P}) : r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3 + r_4 = 0,$$

$$(\mathcal{P}') : r'_1x_1 + r'_2x_2 + r'_3x_3 + r'_4 = 0,$$

$$(\mathcal{P}'') : r''_1x_1 + r''_2x_2 + r''_3x_3 + r''_4 = 0,$$

où

a) pour  $(\mathcal{P}')$ , nous pouvons choisir deux des coefficients  $r'_1, r'_2, r'_3$ , le troisième ainsi que  $r'_4$  étant alors déterminés.

b) pour  $(\mathcal{P}'')$ , nous pouvons choisir deux des coefficients  $r''_1, r''_2, r''_3$ , le troisième ainsi que  $r''_4$  étant alors déterminés.

Nous montrons le théorème 6.2.1 au travers des propositions 6.2.2 et 6.2.5. En fait, les propositions 6.2.2 et 6.2.5 sont des cas particuliers et précis du théorème 6.2.1, qui nous permettent d'en prouver une partie, et nous aident à mieux comprendre ce théorème.

**Proposition 6.2.2.** *Il existe un algorithme pour expliciter une application polynomiale non-propre, dominante de  $\mathbb{C}^3$  dans  $\mathbb{C}^3$  et de degré 2 telle que l'ensemble de Jelonek est l'un des 7 éléments suivants : 1) Un plan quelconque.*

2) Union de deux plans de coordonnée et d'un plan quelconque.

3) Union d'un plan de coordonnée et d'un plan quelconque.

4) Union d'un plan quelconque

$$\alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$$

et d'un autre plan d'équation

ou bien

$$\alpha_3 = r'_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4,$$

ou bien

$$\alpha_2 = \frac{1}{r_2}\alpha_3 + r'_1\alpha_1 - \frac{r_4}{r_2} \text{ si } r_2 \neq 0,$$

ou bien

$$\alpha_1 = \frac{1}{r_1}\alpha_3 + r'_2\alpha_2 - \frac{r_4}{r_1} \text{ si } r_1 \neq 0.$$

5) Union d'un plan quelconque

$$\alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$$

et d'une surface d'équation

ou bien

$$\alpha_3 = r_2\alpha_2 + g(\alpha_1) + r_4,$$

ou bien

$$\alpha_2 = \frac{1}{r_2}\alpha_3 + g(\alpha_1) - \frac{r_4}{r_2} \text{ si } r_2 \neq 0,$$

ou bien

$$\alpha_1 = \frac{1}{r_1}\alpha_3 + g(\alpha_2) - \frac{r_4}{r_1} \text{ si } r_1 \neq 0,$$

où  $g$  est un polynôme non nul de degré 2 tel que  $g(0) = 0$ .

6) Une surface d'équation

$$\alpha_3 = g(\alpha_1) + r_2\alpha_2 + r_4,$$

où  $\deg g = 2$ .

7) Union de trois plans

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_1) : & \alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_3\alpha_3 + r_4 = 0, \\ (\mathcal{P}_2) : & r'_1\alpha_1 + r'_2\alpha_2 + r'_1r_3\alpha_3 + r'_1r_4 = 0, \\ (\mathcal{P}_3) : & \alpha_1 + r_2\alpha_2 + r''_3\alpha_3 + r_4 = 0. \end{aligned}$$

*Démonstration.* L'idée de cette preuve est de commencer par supposer que :

+ l'ensemble  $S_F$  contienne un plan quelconque  $(\mathcal{P})$  de la forme

$$\alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4,$$

+  $F_1 = x_1x_2$  et  $F_2 = x_2x_3$ ,

+ pour une suite  $\{\xi_k\} = \{(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})\}$  tendant vers l'infini telle que  $F(\xi_k)$  tend vers  $a \in (\mathcal{P})$ , alors les suites  $F_1(\xi_k)$  et  $F_2(\xi_k)$  tendent vers des nombres complexes quelconques.

À partir de ces hypothèses, nous arrivons à la liste de la proposition et pour chaque

élément de cette liste, nous pouvons expliciter une classe correspondante d'applications polynomiales dominantes de degré 2.

Prenons maintenant un point  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in (\mathcal{P})$ , il existe une suite  $\{\xi_k\} = \{(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})\}$  tendant vers l'infini et telle que  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$ , c'est-à-dire

$$F_1(\xi_k) \rightarrow \alpha_1, \quad F_2(\xi_k) \rightarrow \alpha_2, \quad F_3(\xi_k) \rightarrow \alpha_3,$$

où  $F = (F_1, F_2, F_3)$ . Supposons que  $F_1 = x_1x_2$ ,  $F_2 = x_2x_3$ . D'une part,  $F$  est dominante, alors par la proposition 1.2.12, page 29, les polynômes  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$  sont indépendants. D'autre part,  $S_F$  contient le plan  $(\mathcal{P})$ , nous pouvons écrire  $F_3$  de la forme :

$$F_3 = r_1F_1 + r_2F_2 + r_4 + f(x_1, x_2, x_3) = r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r_4 + f(x_1, x_2, x_3),$$

où  $f(x_1, x_2, x_3)$  est une application polynomiale possédant les propriétés suivantes :

- i)  $\deg f \leq 2$  puisque  $\deg F \leq 2$ ,
- ii) quelle que soit la suite  $\{\xi_k\}$  tendant vers l'infini,  $f(\xi_k)$  ne tend pas vers l'infini puisque  $F_3(\xi_k)$  ne tend pas vers l'infini,
- iii) les applications polynomiales  $f(x_1, x_2, x_3)$ ,  $x_1x_2$  et  $x_2x_3$  sont indépendantes. L'application  $f(x_1, x_2, x_3)$  n'est pas nulle puisque  $F$  est dominante.

Nous avons les quatre cas suivants :<sup>3</sup>

a) Si  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  alors  $S_F$  est une droite, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse suivant laquelle  $S_F$  contient un plan  $(\mathcal{P})$ .

b) Si  $\alpha_1 \neq 0$  et  $\alpha_2 \neq 0$ , nous avons deux situations possibles :

i) Si  $x_{1,k}$  tend vers l'infini, alors  $x_{2,k}$  tend vers 0 et  $x_{3,k}$  tend vers l'infini : considérons par exemple la suite  $\{\xi_k\} = \{(\alpha_1k, \frac{1}{k}, \alpha_2k)\}$ . D'une part, dans ce cas, nous pouvons supposer que  $f(\xi_k)$  tend vers 0. D'autre part,  $F_3$  tend vers  $r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$ . Des propriétés de  $f(x_1, x_2, x_3)$ , nous pouvons choisir  $f(x_1, x_2, x_3)$  de la forme :

$$f(x_1, x_2, x_3) = g(x_2),$$

où  $g$  est un polynôme non nul en la variable  $x_2$  et de degré au maximum 2.

Dans ce cas, l'ensemble  $S_F$  contient le plan  $\alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$ . Notons  $A_1$  cette situation.

ii) Si  $x_{1,k}$  tend vers 0, alors  $x_{2,k}$  tend vers l'infini et  $x_{3,k}$  tend vers 0 : considérons par exemple la suite  $\{\xi_k\} = \{(\frac{\alpha_1}{k}, k, \frac{\alpha_2}{k})\}$ . De la même façon que dans le cas i), nous pouvons choisir  $f(x_1, x_2, x_3)$  de la forme :

$$f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_3),$$

---

3. En fait, dans certains des cas suivants, nous pouvons supposer que  $f(\xi_k)$  tend vers 0 en mettant les produits  $x_1x_2$  et  $x_2x_3$  dans  $f$  à  $r_1x_1x_2$  et  $r_2x_2x_3$ , nous "perturbons" un peu  $r_1$  et  $r_2$ .

où  $g$  est un polynôme non nul des variables  $x_1, x_3$  et de degré au maximum 2.

Dans ce cas, l'ensemble  $S_F$  contient le plan  $\alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$ . Notons  $A_2$  cette situation.

c) Si  $\alpha_1 = 0$  et  $\alpha_2 \neq 0$ , nous avons trois situations possibles :

i) Si  $x_{2,k}$  tend vers l'infini, alors  $x_{3,k}$  tend vers 0 et  $x_{1,k}$  tend vers 0 : considérons par exemple la suite  $\{\xi_k\} = \left\{\left(\frac{1}{k^2}, k\alpha_2, \frac{1}{k}\right)\right\}$ . Dans ce cas, nous pouvons choisir  $f(x_1, x_2, x_3)$  comme polynôme non nul des variables  $x_1, x_2, x_3$ , de degré au maximum 2 et tel que  $f(\xi_k)$  tend vers  $l\alpha_2$ , où  $l \in \mathbb{C}$ . L'ensemble  $S_F$  contient la droite  $\{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : \alpha_1 = 0, \alpha_3 = (n + l)\alpha_2\}$ , qui est située dans le plan  $\{\alpha_1 = 0\}$ .

ii) Si  $x_{3,k}$  tend vers l'infini, alors  $x_{2,k}$  tend vers 0 et  $x_{1,k}$  tend vers un nombre complexe quelconque  $\lambda$  : considérons par exemple la suite  $\{\xi_k\} = \left\{\left(\lambda, \frac{\alpha_2}{k}, k\right)\right\}$ . Dans ce cas, pour que l'ensemble  $S_F$  contienne un plan, nous pouvons choisir  $f(x_1, x_2, x_3)$  comme polynôme non nul des variables  $x_1, x_2, x_3$ , de degré au maximum 2 et tel que

$$f(x_1, 0, 0) \neq 0.$$

L'ensemble  $S_F$  contient des points de la forme  $(0, \alpha_2, r_2\alpha_2 + \lim f(\xi_k))$ . L'ensemble  $S_F$  contient donc le plan  $\{\alpha_1 = 0\}$ . Notons  $A_3$  cette situation.

Nous voyons que dans ce cas, d'une part  $x_{1,k}$  tend vers un nombre complexe  $\lambda$ , d'autre part  $f(x_1, 0, 0) \neq 0$ . Nous pouvons donc "déformer"  $F$  en ajoutant à  $F_i(x_1, x_2, x_3)$  des applications  $g_i(x_1)$ , où  $g_i(x_1)$  est un polynôme non nul, en la variable  $x_1$ , admettant toutes les propriétés de  $f(x_1, x_2, x_3)$ .

Si  $\deg g_i(x_1) = 1$ , pour tout  $i = 1, 2, 3$ , alors  $S_F$  contient un plan qui n'est pas de coordonnée. Notons  $A_4$  cette situation.

S'il existe  $i$  tel que  $\deg g_i(x_1) = 2$ , alors  $S_F$  contient une surface. Notons  $A_5$  cette situation.

Par ailleurs, puisque  $x_{2,k}$  tend vers 0, nous pouvons encore "déformer"  $F$  en ajoutant à  $F_i(x_1, x_2, x_3)$  des applications  $g'_i(x_2)$ , où  $g'_i(x_2)$  sont des polynômes non nuls, en la variable  $x_2$ , admettant toutes les propriétés de  $f(x_1, x_2, x_3)$ . Si nous bougeons  $F$  par ajoutant à  $F_i(x_1, x_2, x_3)$  à la fois des polynômes  $g_i(x_1)$  et des polynômes  $g'_i(x_2)$ , alors dans ce cas,  $S_F$  a une seule façon  $\kappa = (3)[2]$  et  $S_F$  est donc une surface ou un plan. S'il existe  $i \in \{1, 2, 3\}$  tel que  $\deg g_i(x_1) = 2$ , alors  $S_F$  est réduit à une surface seulement. Notons  $A_6$  cette situation.

iii) Si  $x_{1,k}$  tend vers l'infini,  $x_{2,k}$  tend vers 0 et  $x_{3,k}$  tend vers l'infini : considérons par exemple la suite  $\left\{\left(k, \frac{1}{k^2}, \alpha_2 k^2\right)\right\}$ , alors  $F(\xi_k)$  tend vers  $(0, \alpha_2, l\alpha_2)$ , où  $l$  est un nombre complexe. L'ensemble  $S_F$  contient donc une droite située dans le plan  $\{\alpha_1 = 0\}$ .

d) Si  $\alpha_1 \neq 0$  et  $\alpha_2 = 0$  : ce cas est semblable au cas c), en échangeant les rôles des variables  $x_1$  et  $x_3$ .

Pour résumer, nous avons les cas suivants :

1) Le cas  $A_1$  : choisissons

$$F = (x_1x_2, x_2x_3, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r_4 + g(x_2)),$$

où  $g(x_2)$  est un polynôme non nul en la variable  $x_2$  et de degré au maximum 2, alors  $S_F$  est un plan quelconque  $\alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$ . Dans ce cas, la façon de  $S_F$  est  $(1, 3)[2]$ , correspondant à la suite  $\{(\alpha_1k, \frac{1}{k}, \alpha_2k)\}$ .

Déterminons maintenant des conditions suffisantes du polynôme  $g(x_2)$  pour que l'application  $F$  soit dominante. Prenons le point  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3 \setminus S_F$ . Considérons le système d'équations suivant :

$$x_1x_2 = \alpha_1, \quad x_2x_3 = \alpha_2, \quad r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r_4 + g(x_2) = \alpha_3. \quad (6.2.3)$$

Nous avons

$$g(x_2) = \alpha_3 - r_1\alpha_1 - r_2\alpha_2 - r_4. \quad (6.2.4)$$

Puisque  $a \notin S_F$ , alors l'équation (6.2.4) devient  $g(x_2) = u$  où  $u \neq 0$ . Pour que le système d'équations (6.2.3) aie toujours une solution, alors l'équation  $g(x_2) = u$  doit admettre toujours une solution  $x_2 \neq 0$ , pour tout  $u \neq 0$ . Cela implique :

$$g(0) = 0,$$

c'est-à-dire le coefficient constant de  $g(x_2)$  est nul. En effet, si  $g(0) = \lambda \neq 0$ , alors avec un choix du point  $a$  tel que  $\alpha_3 - r_1\alpha_1 - r_2\alpha_2 - r_4 = \lambda$ , l'équation (6.2.4) admet une solution  $x_2 = 0$ . Mais si l'équation (6.2.4) n'a qu'une seule solution alors  $x_2 = 0$ , d'où la contradiction.

2) Le cas  $A_2$  : choisissons

$$F = (x_1x_2, x_2x_3, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r_4 + g(u)),$$

où  $g(u)$  est un polynôme non nul en la variable  $u = x_1x_3$  et de degré 1. Dans ce cas,  $S_F$  est l'union des deux plans de coordonnée :

$$(\mathcal{P}_1) : \alpha_1 = 0, \quad (\mathcal{P}_2) : \alpha_2 = 0,$$

et d'un plan quelconque :

$$(\mathcal{P}_3) : \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4.$$

La façon de  $(\mathcal{P}_1)$  est  $(3)[1, 2]$ , correspondant à la suite  $\{(\frac{\alpha_3}{k}, \frac{\alpha_2}{k}, k)\}$ .

La façon  $(\mathcal{P}_2)$  est  $(1)[2, 3]$ , correspondant à la suite  $\{(k, \frac{\alpha_1}{k}, \frac{\alpha_3}{k})\}$ .

La façon  $(\mathcal{P}_3)$  est  $(2)[1, 3]$ , correspondant à la suite  $\{(\frac{\alpha_1}{k}, k, \frac{\alpha_2}{k})\}$ .

De la même façon que dans le cas 1), pour que  $F$  soit dominante, alors le coefficient constant de  $g(u)$  doit être nul.



3) Le cas  $A_3$  : choisissons

$$F = (x_1x_2, x_2x_3, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r_4 + g(x_1)),$$

où  $g(x_1)$  est un polynôme non nul, en la variable  $x_1$  et de degré au maximum 2. Dans ces cas,  $S_F$  est l'union d'un plan de coordonnée :

$$(\mathcal{P}_1) : \alpha_1 = 0,$$

et d'un plan quelconque :

$$(\mathcal{P}_2) : \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4.$$

La façon du plan  $(\mathcal{P}_1)$  est (3)[2], correspondant à la suite  $\left\{\left(\lambda, \frac{\alpha_2}{k}, k\right)\right\}$ .

La façon du plan  $(\mathcal{P}_2)$  est (2)[1, 3], correspondant à la suite  $\left\{\left(\frac{1}{k}, \alpha_1k, \frac{\alpha_2}{\alpha_1k}\right)\right\}$ .

De la même façon que dans le cas 1), pour que  $F$  soit dominante, alors le coefficient constant de  $g(x_1)$  est nul.

4) Le cas  $A_4$  : choisissons

$$F = (x_1x_2 + g_1(x_1), x_2x_3 + g_2(x_1), r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r_4 + g_3(x_1)),$$

où les polynômes  $g_i(x_1)$  sont non nuls en la variable  $x_1$  et de degré 1, pour  $i = 1, 2, 3$ . De la même façon que dans le cas 1), pour que  $F$  soit dominante, alors les coefficients constants de  $g_i(x_1)$  sont nuls. Dans ce cas,  $S_F$  est l'union d'un plan  $(\mathcal{P}_1)$  quelconque :

$$\alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4,$$

et d'un plan  $(\mathcal{P}_2)$  d'équation :

ou bien

$$\alpha_3 = r'_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4,$$

ou bien

$$\alpha_2 = \frac{1}{r_2}\alpha_3 + r'_1\alpha_1 - \frac{1}{r_4} \text{ si } r_2 \neq 0.$$

La façon de  $(\mathcal{P}_1)$  est (2)[1, 3], correspondant à la suite  $\left\{\left(\frac{1}{k}, \alpha_1k, \frac{\alpha_2}{\alpha_1k}\right)\right\}$ . La façon de  $(\mathcal{P}_2)$  est (3)[2], correspondant à la suite  $\left\{\left(\lambda, \frac{\mu}{k}, k\right)\right\}$ .

Choisissons maintenant :

$$F = (x_1x_2 + g_1(x_3), x_2x_3 + g_2(x_3), r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + g_3(x_3)),$$

où les polynômes  $g_i(x_3)$  sont non nuls, en la variable  $x_3$ , de degré 1 et tels que  $g_i(0) = 0$ , pour  $i = 1, 2, 3$ . Dans ce cas,  $S_F$  est l'union d'un plan  $(\mathcal{P}_1)$  quelconque

$$\alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4,$$

et d'un plan ( $\mathcal{P}_2$ ) d'équation

$$\alpha_1 = \frac{1}{r_1}\alpha_3 + r_2'\alpha_2 - \frac{1}{r_4} \text{ si } r_1 \neq 0.$$

La façon de ( $\mathcal{P}_1$ ) est (2)[1, 3], correspondant à la suite  $\left\{\left(\frac{1}{k}, \alpha_1 k, \frac{\alpha_2}{\alpha_1 k}\right)\right\}$ . La façon de ( $\mathcal{P}_2$ ) est (1)[2], correspondant à la suite  $\left\{\left(k, \frac{\lambda}{k}, \mu\right)\right\}$ .

5) Le cas  $A_5$  :

i) Choisissons

$$F = (x_1x_2 + g_1(x_1), x_2x_3 + g_2(x_1), r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + g_3(x_1)) \quad (r_1^2 + r_2^2 \neq 0),$$

où les polynômes  $g_i(x_1)$  sont non nuls, en la variable  $x_1$ , de coefficients constants nuls et tels que

$$\deg g_1 = \deg g_2 = 1, \quad \deg g_3 = 2, \quad g_i(0) = 0.$$

Nous avons

$$r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + g_3(x_1) = r_1x_1x_2 + r_2(x_2x_3 + g_2(x_1)) + g_3(x_1) - r_2g_2(x_1).$$

Puisque  $\deg g_1 = \deg g_2 = 1$  et  $\deg g_3 = 2$ , il existe un polynôme non nul  $g^*$  de degré 2, du coefficient constant nul tel que :

$$g_3(x_1) - r_2g_2(x_1) = g^*(g_1(x_1)).$$

Si  $r_2 \neq 0$ , il existe un polynôme  $g^{**}$  de degré 2, du coefficient constant nul tel que :

$$g_2(x_1) = \frac{g_3(x_1) - g^*(g_1(x_1))}{r_2} = g^{**}(g_1(x_1)).$$

Dans ce cas,  $S_F$  est l'union d'un plan quelconque

$$\alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2,$$

et d'une surface dont l'équation est ou bien

$$\alpha_3 = r_2\alpha_2 + g^*(\alpha_1) + r_4,$$

ou bien

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_3}{r_2} + g^{**}(\alpha_1) - \frac{r_4}{r_2} \text{ si } r_2 \neq 0,$$

La façon du plan est (2)[1, 3], correspondant à la suite  $\left\{\left(\frac{1}{k}, \alpha_1 k, \frac{\alpha_2}{\alpha_1 k}\right)\right\}$ . La façon de la surface est (3)[2], correspondant à la suite  $\left\{\left(\lambda, \frac{\mu}{k}, k\right)\right\}$ .

Choisissons maintenant :

$$F = (x_1x_2 + g_1(x_3), x_2x_3 + g_2(x_3), r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + g_3(x_3)),$$

où les polynômes  $g_i(x_1)$  sont non nuls, en la variable  $x_1$  et de coefficients constants nuls tels que

$$\deg g_2 = \deg g_3 = 1, \quad \deg g_1 = 2.$$

L'ensemble  $S_F$  est l'union d'un plan qui n'est pas de coordonnée dont l'équation est

$$\alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4,$$

et d'une surface dont l'équation est

$$\alpha_1 = \frac{1}{r_1} \alpha_3 + g^{**}(\alpha_2) \text{ si } r_1 \neq 0,$$

où  $\deg g^{**} = 2$  et  $g^{**}(0) = 0$ .

La façon du plan est (2)[1, 3], correspondant à la suite  $\left\{ \left( \frac{1}{k}, \alpha_1 k, \frac{\alpha_2}{\alpha_1 k} \right) \right\}$ . La façon de la surface est (3)[2], correspondant à la suite  $\left\{ \left( \lambda, \frac{\mu}{k}, k \right) \right\}$ .

6) Le cas  $A_6$  : choisissons

$$F = (x_1x_2 + g_1(x_1) + g'_1(x_2), x_2x_3 + g_2(x_1) + g'_2(x_2), r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r_4 + g_3(x_1) + g'_3(x_2)),$$

où les polynômes  $g_i(x_1)$  sont non nuls, en la variable  $x_1$ , des coefficients constants nuls et les  $g'_i(x_2)$  sont des polynômes en la variable  $x_2$ , de coefficients constants nuls tels que

$$\deg g_1 = \deg g_2 = 1, \quad \deg g_3 = 2, \quad 1 \leq \deg g'_i \leq 2 \text{ pour } i = 1, 2, 3,$$

et tels qu'il existe  $i \in \{1, 2, 3\}$  tel que  $g'_i(x_2) \neq 0$ .

L'ensemble  $S_F$  est une surface de la forme :

$$\alpha_3 = g(\alpha_1) + r_2\alpha_2 + r_4,$$

où  $\deg g = 2$  et  $g(0) = 0$ .

La façon de cette surface est (3)[2], correspondant à la suite  $\left\{ \left( \lambda, \frac{\mu}{k}, k \right) \right\}$ .

7) Cas de trois plans. Supposons maintenant que  $S_F$  contienne trois plans qui ne sont pas de coordonnée :

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_1) : & \quad r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_3\alpha_3 + r_4 = 0, \\ (\mathcal{P}_2) : & \quad r'_1\alpha_1 + r'_2\alpha_2 + r'_3\alpha_3 + r'_4 = 0, \\ (\mathcal{P}_3) : & \quad r''_1\alpha_1 + r''_2\alpha_2 + r''_3\alpha_3 + r''_4 = 0. \end{aligned}$$

Nous pouvons supposer que  $r_1 = 1$ . Supposons que  $\kappa_1 = (2)[1, 3]$  soit une façon de  $(\mathcal{P}_1)$  correspondant à la suite  $\{\xi_k\} = \{(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})\}$  telle que  $x_{1,k}x_{2,k}$  tende vers un nombre complexe quelconque  $\lambda$  et  $x_{2,k}x_{3,k}$  tende vers un nombre complexe quelconque  $\mu$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} F_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + \dots, \\ F_3(x_1, x_2, x_3) &= x_2x_3 + \dots, \\ F_1(x_1, x_2, x_3) &= -r_2x_1x_2 - r_3x_2x_3 - r_4 + \dots \end{aligned}$$

Supposons que  $\kappa_2 = (3)[1, 2]$  soit une façon de  $(\mathcal{P}_2)$  correspondant à la suite  $\{\eta_k\} = \{(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})\}$  telle que  $x_{2,k}x_{3,k}$  tend vers un nombre complexe quelconque  $\mu$  et  $x_{3,k}x_{1,k}$  tend vers un nombre complexe quelconque  $\nu$ . Pour que  $S_F$  contienne toujours  $(\mathcal{P}_1)$ , alors nous avons :

$$\begin{aligned} F_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + k_2x_1x_3, \\ F_3(x_1, x_2, x_3) &= x_2x_3 + k_3x_1x_3, \\ F_1(x_1, x_2, x_3) &= -r_2x_1x_2 - r_3x_2x_3 - r_4 + k_1x_1x_3. \end{aligned}$$

Nous voyons que :

$$F_1(\eta_k) \rightarrow -r_3\mu - r_4 + k_1\nu, \quad F_2(\eta_k) \rightarrow k_2\nu, \quad F_3(\eta_k) \rightarrow \mu + k_3\nu.$$

Si  $F(\eta_k)$  tend vers un point  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  dans  $(\mathcal{P}_2)$ , alors nous avons :

$$r'_1(-r_3\mu - r_4 + k_1\nu) + r'_2(k_2\nu) + r'_3(\mu + k_3\nu) + r'_4 = 0.$$

Cela implique :

$$(-r'_1r_3 + r'_3)\mu + (r'_1k_1 + r'_2k_2 + r'_3k_3)\nu + r'_4 - r'_1r_4 = 0.$$

D'où il vient :

$$-r'_1r_3 + r'_3 = 0, \quad r'_1k_1 + r'_2k_2 + r'_3k_3 = 0, \quad r'_4 - r'_1r_4 = 0.$$

Donc nous avons :

$$r'_3 = r'_1r_3, \quad r'_4 = r'_1r_4, \quad r'_1k_1 + r'_2k_2 + r'_1r_3k_3 = 0.$$

En fait, nous pouvons toujours choisir  $k_1, k_2$  et  $k_3$  tels que  $r'_1k_1 + r'_2k_2 + r'_1r_3k_3 = 0$ .

Supposons que la façon  $\kappa_3 = (1)[2, 3]$  soit une façon de  $(\mathcal{P}_3)$  correspondant à la suite  $\{\zeta_k\} = \{(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})\}$  telle que  $x_{1,k}x_{2,k}$  tend vers un nombre complexe quelconque  $\lambda$  et  $x_{3,k}x_{1,k}$  tend vers un nombre complexe quelconque  $\nu$ . Nous avons :

$$F_1(\zeta_k) \rightarrow -r_2\lambda + k_1\nu - r_4, \quad F_2(\zeta_k) \rightarrow \lambda + k_2\nu, \quad F_3(\zeta_k) \rightarrow k_3\nu.$$

Si  $F(\zeta_k)$  tend vers un point  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  dans  $(\mathcal{P}_3)$ , alors nous avons :

$$\nu = \frac{\alpha_3}{k_3}, \quad \lambda = \alpha_2 - \frac{k_2}{k_3}\alpha_3, \quad \alpha_1 = -r_2 \left( \alpha_2 - \frac{k_2}{k_3}\alpha_3 \right) + \frac{k_1}{k_3}\alpha_3 - r_4 = 0,$$

où  $k_3 \neq 0$ . L'équation de  $(\mathcal{P}_3)$  devient :

$$\alpha_1 + r_2\alpha_2 - r_3''\alpha_3 + r_4 = 0,$$

où  $r_3'' = -\frac{k_1+r_2k_2}{k_3}$ .

Déterminons maintenant des conditions suffisantes pour que l'application  $F$  soit dominante. Prenons le point  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  dans  $\mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3 \setminus S_F$ . Considérons le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} -r_2x_1x_2 - r_3x_2x_3 - r_4 + k_1x_1x_3 &= \alpha_1, \\ x_1x_2 + k_2x_1x_3 &= \alpha_2, \quad x_2x_3 + k_3x_1x_3 = \alpha_3. \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Remplaçons  $x_1x_2 = \alpha_2 - k_2x_1x_3$  et  $x_2x_3 = \alpha_3 - k_3x_1x_3$  dans l'équation

$$-r_2x_1x_2 - r_3x_2x_3 - r_4 + k_1x_1x_3 = \alpha_1,$$

nous obtenons l'équation :

$$(k_1 + r_2k_2 + r_3k_3)x_1x_3 = \alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_3\alpha_3 + r_4.$$

Puisque  $k_1 + r_2k_2 = -r_3''k_3$ , alors nous avons

$$k_1 + r_2k_2 + r_3k_3 = (r_3'' - r_3)k_3.$$

Si  $r_3'' \neq r_3$ , alors nous avons :

$$k_1 + r_2k_2 + r_3k_3 \neq 0.$$

Cela implique :

$$\begin{aligned} x_1x_3 &= \frac{\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_3\alpha_3 + r_4}{k_1 + r_2k_2 + r_3k_3}, \\ x_1x_2 &= \frac{-k_2\alpha_1 + (k_1 + r_3k_3)\alpha_2 - k_2r_3\alpha_3 - k_2r_4}{k_1 + r_2k_2 + r_3k_3}, \\ x_1x_2 &= \frac{-\alpha_1 - r_2\alpha_2 - r_3''\alpha_3 - r_4}{k_3(k_1 + r_2k_2 + r_3k_3)}. \end{aligned}$$

Puisque  $a \notin S_F$ , alors  $x_1x_2, x_2x_3$  et  $x_3x_1$  sont non nuls. Le système d'équations (6.2.4) admet donc toujours une solution.

Alors, avec trois plans donnés qui ne sont pas de coordonnée :

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}_1) : & \alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_3\alpha_3 + r_4 = 0, \\(\mathcal{P}_2) : & r'_1\alpha_1 + r'_2\alpha_2 + r'_1r_3\alpha_3 + r'_1r_4 = 0, \\(\mathcal{P}_3) : & \alpha_1 + r_2\alpha_2 + r''_3\alpha_3 + r_4 = 0 \quad (r''_3 \neq r_3),\end{aligned}$$

nous choisissons trois nombres complexes  $k_1, k_2$  et  $k_3$  tels que :

$$r'_1k_1 + r'_2k_2 + r'_1r_3k_3 = 0, \quad -\frac{k_1 + r_2k_2}{k_3} = r''_3 \quad \text{et } k_3 \neq 0,$$

alors la réunion des 3 plans est l'ensemble  $S_F$  de l'application polynomiale :

$$F = (-r_2x_1x_2 - r_3x_2x_3 - r_4 + k_1x_1x_3, x_1x_2 + k_2x_1x_3, x_2x_3 + k_3x_1x_3).$$

□

Nous pouvons en fait translater des plans de coordonnée et nous obtenons le résultat suivant :

**Proposition 6.2.5.** *Il existe un algorithme permettant d'expliciter une application polynomiale non-propre, dominante  $F : \mathbb{C}^3_{(x_1, x_2, x_3)} \rightarrow \mathbb{C}^3_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}$  de degré 2 telle que l'ensemble  $S_F$  soit donné par l'une des situations suivantes :*

1) Si  $S_F$  est un plan quelconque ( $\mathcal{P}$ ) d'équation

$$\alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4,$$

alors

$$F = (x_1x_2, x_2x_3, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + g(x_2) + r_4),$$

où  $g(x_2)$  est un polynôme non nul en la variable  $x_2$ , de coefficient constant nul et de degré au maximum 2. La façon sur ( $\mathcal{P}$ ) est  $(1, 3)[2]$ .

2) Si  $S_F$  est l'union de deux plans d'équations

$$(\mathcal{P}_1) : \alpha_1 = c_1, \quad \text{où } c_1 \in \mathbb{C},$$

$$(\mathcal{P}_2) : \alpha_2 = c_2, \quad \text{où } c_2 \in \mathbb{C},$$

et d'un plan quelconque d'équation

$$(\mathcal{P}_3) : \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4,$$

alors

$$F = (x_1x_2 + c_1, x_2x_3 + c_2, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + g(x_1x_3) + r_4 - c_1r_1 - c_2r_2),$$

où  $g(x_1x_3)$  est un polynôme non nul, de coefficient constant nul, et de degré 1 en la variable le produit  $x_1x_3$ .

La façon de  $(\mathcal{P}_1)$  est  $(3)[1, 2]$ , la façon de  $(\mathcal{P}_2)$  est  $(1)[2, 3]$  et la façon de  $(\mathcal{P}_3)$  est  $(2)[1, 3]$ .

3) Si  $S_F$  est l'union d'un plan d'équation

$$(\mathcal{P}_1) : \alpha_1 = c_1, \text{ où } c_1 \in \mathbb{C},$$

et d'un plan quelconque d'équation

$$(\mathcal{P}_2) : \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4,$$

alors

$$F = (x_1x_2 + c_1, x_2x_3, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + g(x_1) + r_4 + c_1r_1),$$

où  $g(x_1)$  est un polynôme non nul, de coefficient constant nul et de degré au maximum 2 en la variable  $x_1$ .

La façon de  $(\mathcal{P}_1)$  est  $(3)[2]$  et la façon de  $(\mathcal{P}_2)$  est  $(2)[1, 3]$ .

4) a) Si  $S_F$  est l'union d'un plan quelconque d'équation

$$(\mathcal{P}_1) : \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$$

et d'un autre plan de la forme

$$(\mathcal{P}_2) : \alpha_3 = r'_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4,$$

où  $r_1 \neq r'_1$  et  $r'_1 \neq 0$ , alors

$$F = (x_1x_2 + x_1, x_2x_3, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r'_1x_1 + r_4).$$

La façon de  $(\mathcal{P}_1)$  est  $(2)[1, 3]$  et la façon de  $(\mathcal{P}_2)$  est  $(3)[2]$ .

b) Si  $S_F$  est l'union d'un plan quelconque d'équation

$$(\mathcal{P}_1) : \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$$

et d'un autre plan de la forme

$$(\mathcal{P}_2) : \alpha_2 = \frac{1}{r_2}\alpha_3 + r'_1\alpha_1 - \frac{r_4}{r_2},$$

où  $r_2 \neq 0$ , alors

$$F = (x_1x_2 + x_1, x_2x_3 + r'_1x_1, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r_4).$$

La façon de  $(\mathcal{P}_1)$  est  $(2)[1, 3]$  et la façon de  $(\mathcal{P}_2)$  est  $(3)[2]$ .

c) Si  $S_F$  est l'union d'un plan quelconque d'équation

$$(\mathcal{P}_1) : \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$$

et d'un autre plan de la forme

$$(\mathcal{P}_2) : \alpha_1 = \frac{1}{r_1}\alpha_3 + r'_2\alpha_2 - \frac{r_4}{r_1},$$

où  $r'_1 \neq 0$ , alors

$$F = (x_1x_2 + r'_2x_3, x_2x_3 + x_3, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r_4).$$

La façon de  $(\mathcal{P}_1)$  est  $(2)[1, 3]$  et la façon de  $(\mathcal{P}_2)$  est  $(1)[2]$ .

5) a) Si  $S_F$  est l'union d'un plan quelconque d'équation

$$(\mathcal{P}) : \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$$

et d'une surface de la forme

$$(\mathcal{S}) : \alpha_3 = r_1\alpha_1^p + r'_1\alpha_1^{p'} + r_2\alpha_2 + r_4,$$

où, ou bien  $r_1 \neq 0$  et  $p = 2$ , ou bien  $r'_1 \neq 0$  et  $p' = 2$ , alors

$$F = (x_1x_2 + x_1, x_2x_3, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r_1x_1^p + r'_1x_1^{p'} + r_4).$$

La façon du plan  $(\mathcal{P}_1)$  est  $(2)[1, 3]$  et la façon de la surface  $(\mathcal{S})$  est  $(3)[2]$ .

b) Si  $S_F$  est l'union d'un plan quelconque d'équation

$$(\mathcal{P}) : \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$$

et d'une surface de la forme

$$(\mathcal{S}) : \alpha_2 = \frac{1}{r_2}\alpha_3 + r_1\alpha_1^p + r'_1\alpha_1^{p'} - \frac{r_4}{r_2}, \text{ si } r_2 \neq 0,$$

où, ou bien  $r_1 \neq 0$  et  $p = 2$ , ou bien  $r'_1 \neq 0$  et  $p' = 2$ , alors

$$F = (x_1x_2 + x_1, x_2x_3 + r_1x_1^p + r'_1x_1^{p'}, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r_4).$$

La façon du plan  $(\mathcal{P})$  est  $(2)[1, 3]$  et la façon de la surface  $(\mathcal{S})$  est  $(3)[2]$ .

c) Si  $S_F$  est l'union d'un plan quelconque d'équation

$$(\mathcal{P}) : \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$$



et d'une surface de la forme

$$(\mathcal{S}) : \alpha_1 = \frac{1}{r_1} \alpha_3 + r_3 \alpha_2^p + r'_3 \alpha_2^{p'} - \frac{r_4}{r_1}, \text{ si } r_1 \neq 0,$$

où, ou bien  $r_3 \neq 0$  et  $p = 2$ , ou bien  $r'_3 \neq 0$  et  $p' = 2$ , alors

$$F = (x_1 x_2 + r_3 x_3^p + r'_3 x_3^{p'}, x_2 x_3 + x_3, r_1 x_1 x_2 + r_2 x_2 x_3 + r_4).$$

La façon du plan  $(\mathcal{P})$  est  $(2)[1, 3]$  et la façon de la surface  $(\mathcal{S})$  est  $(1)[2]$ .

6) Si  $S_F$  est une surface  $(\mathcal{S})$  de la forme

$$\alpha_3 = r_2 \alpha_2 + r_1 \alpha_1^p + r'_1 \alpha_1^{p'} + r_4,$$

où, ou bien  $r_1 \neq 0$  et  $p = 2$ , ou bien  $r'_1 \neq 0$  et  $p' = 2$ , alors

$$F = (x_1 x_2 + x_1, x_2 x_3, r_2 x_2 x_3 + r_1 x_1^p + r'_1 x_1^{p'} + x_2 + r_4).$$

La façon sur  $(\mathcal{S})$  est  $(2)[3]$ .

7) Si  $S_F$  est l'union de trois plans d'équations :

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_1) : & \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + r_3 \alpha_3 + r_4 = 0, \\ (\mathcal{P}_2) : & r'_1 \alpha_1 + r'_2 \alpha_2 + r'_1 r_3 \alpha_3 + r'_1 r_4 = 0, \\ (\mathcal{P}_3) : & \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + r''_3 \alpha_3 + r_4 = 0, \end{aligned}$$

alors

$$F = (-r_2 x_1 x_2 - r_3 x_2 x_3 + k_1 x_1 x_3 - r_4, x_1 x_2 + k_2 x_1 x_3, x_2 x_3 + k_3 x_1 x_3),$$

où

$$r'_1 k_1 + r'_2 k_2 + r'_1 r_3 k_3 = 0, \quad -\frac{k_1 + r_2 k_2}{k_3} = r''_3 \quad \text{et } k_3 \neq 0.$$

La façon de  $(\mathcal{P}_1)$  est  $(2)[1, 3]$ , la façon de  $(\mathcal{P}_2)$  est  $(3)[1, 2]$  et la façon de  $(\mathcal{P}_3)$  est  $(1)[2, 3]$ .

*Démonstration.* 1) Considérons le plan

$$(\mathcal{P}) : \alpha_3 = r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + r_4.$$

Nous affirmons que l'application<sup>4</sup>

$$F = (x_1 x_2, x_2 x_3, r_1 x_1 x_2 + r_2 x_2 x_3 + r_4 + g(x_2)),$$

---

4. Comme les suivantes, la forme de cette application est inspirée par la démonstration de la proposition 6.2.2.

où  $g(x_2)$  est un polynôme non nul en la variable  $x_2$ , de coefficient constant nul et de degré au maximum 2, admet le plan  $(\mathcal{P})$  comme l'ensemble de Jelonek  $S_F$  et est dominante.

Prenons un point  $a$  d'une strate de dimension 2 de  $S_F$ , alors  $a$  admet une seule façon  $\kappa = (1, 3)[2]$ , correspondant à la suite  $\{\xi_k\} = \{(\lambda k, \frac{1}{k}, \mu k)\}$ . Nous avons  $F(\xi_k)$  tend vers  $(\lambda, \mu, r_1\lambda + r_2\mu + r_4)$ . L'ensemble  $S_F$  est donc le plan :

$$(\mathcal{P}) : \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4.$$

Prouvons maintenant que  $F$  est dominante. Prenons le point  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  dans  $\mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3 \setminus S_F$ . Considérons le système d'équations suivant :

$$x_1x_2 = \alpha_1, \quad x_2x_3 = \alpha_2, \quad r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r_4 + g(x_2) = \alpha_3. \quad (6.2.6)$$

Nous avons

$$g(x_2) = \alpha_3 - r_1\alpha_1 - r_2\alpha_2 - r_4. \quad (6.2.7)$$

Puisque  $a \notin S_F$ , alors l'équation (6.2.7) devient  $g(x_2) = u$  où  $u \neq 0$ . Puisque  $g(0) = 0$ , alors l'équation  $g(x_2) = u$  admet toujours une solution  $x_2 \neq 0$ . Le système d'équations (6.2.6) admet donc toujours une solution.

2) Considérons trois plans d'équations

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_1) : \quad & \alpha_1 = c_1, \\ (\mathcal{P}_2) : \quad & \alpha_2 = c_2, \\ (\mathcal{P}_3) : \quad & \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4. \end{aligned}$$

Nous affirmons que l'application

$$F = (x_1x_2 + c_1, x_2x_3 + c_2, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + g(x_1x_3) + r_4 + c_1r_1 + c_2r_2),$$

où  $g(x_1x_3)$  est un polynôme non nul, de coefficient constant nul, et de degré 1 en la variable le produit  $x_1x_3$ , admet l'union  $(\mathcal{P}_1) \cup (\mathcal{P}_2) \cup (\mathcal{P}_3)$  comme ensemble de Jelonek  $S_F$  et est dominante.

Prenons un point  $a$  d'une strate de dimension 2 de  $S_F$ , alors  $a$  admet les trois façons possibles suivantes :

*i)* La façon  $\kappa_1 = (3)[1, 2]$ , correspondant à la suite  $\{\xi_k^1\} = \{(\frac{\lambda}{k}, \frac{\mu}{k}, k)\}$ . Nous avons  $F(\xi_k^1)$  tend vers  $(c_1, \mu + c_2, r_2\mu + g(\lambda) + r_4 - c_1r_1 - c_2r_2)$ . L'ensemble  $S_F$  contient donc le plan :

$$(\mathcal{P}_1) : \alpha_1 = c_1.$$

*ii)* La façon  $\kappa_2 = (1)[2, 3]$ , correspondant à la suite  $\{\xi_k^2\} = \{(k, \frac{\lambda}{k}, \frac{\mu}{k})\}$ . Nous avons  $F(\xi_k^2)$  tend vers  $(\lambda + c_1, c_2, r_1\lambda + g(\mu) + r_4 - c_1r_1 - c_2r_2)$ . L'ensemble  $S_F$  contient donc le plan :

$$(\mathcal{P}_2) : \alpha_2 = c_2.$$

iii) La façon  $\kappa_3 = (2)[1, 3]$ , correspondant à la suite  $\{\xi_k^3\} = \{(\frac{\lambda}{k}, k, \frac{\mu}{k})\}$ . Nous avons  $F(\xi_k^3)$  tend vers  $(\lambda + c_1, \mu + c_2, r_1\lambda + r_2\mu + r_4 + c_1r_1 + c_2r_2)$ . L'ensemble  $S_F$  contient donc le plan :

$$(\mathcal{P}_3) : \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4.$$

Prouvons maintenant que  $F$  est dominante. Prenons le point  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  dans  $\mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3 \setminus S_F$ . Considérons le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} x_1x_2 + c_1 &= \alpha_1, & x_2x_3 + c_2 &= \alpha_2 \\ r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + g(x_1x_3) + r_4 + c_1r_1 + c_2r_2 &= \alpha_3. \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

Nous avons

$$g(x_1x_3) = \alpha_3 - r_1\alpha_1 - r_2\alpha_2 - r_4. \quad (6.2.8)$$

Puisque  $a \notin S_F$ , alors  $x_1, x_2, x_3 \neq 0$  et l'équation (6.2.8) devient  $g(x_1x_3) = u$  où  $u \neq 0$ . Remplaçons  $x_1 = \frac{\alpha_1 - c_1}{x_2}$  et  $x_3 = \frac{\alpha_2 - c_2}{x_2}$  dans l'équation (6.2.8), alors cette équation admet toujours une solution  $x_2 \neq 0$ . Le système d'équations (6.2.7) admet donc toujours une solution.

3) Considérons deux plans d'équations

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_1) : & \alpha_1 = c_1, \\ (\mathcal{P}_2) : & \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4. \end{aligned}$$

Nous affirmons que l'application

$$F = (x_1x_2 + c_1, x_2x_3, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + g(x_1) + r_4 + c_1r_1),$$

où  $g(x_1)$  est un polynôme non nul, de coefficient constant nul et de degré au maximum 2 en la variable  $x_1$ , admet l'union  $(\mathcal{P}_1) \cup (\mathcal{P}_2)$  comme ensemble de Jelonek  $S_F$  et est dominante.

Prenons un point  $a$  d'une strate de dimension 2 de  $S_F$ , alors  $a$  admet les deux façons possibles suivantes :

i) La façon  $\kappa_1 = (3)[2]$ , correspondant à la suite  $\{\xi_k^1\} = \{(\lambda, \frac{\mu}{k}, k)\}$ . Nous avons  $F(\xi_k^1)$  tend vers  $(c_1, \mu, r_2\mu + g(\lambda) + r_4 + c_1r_1)$ . L'ensemble  $S_F$  contient donc le plan :

$$(\mathcal{P}_1) : \alpha_1 = c_1.$$

ii) La façon  $\kappa_2 = (2)[1, 3]$ , correspondant à la suite  $\{\xi_k^2\} = \{(\frac{\lambda}{k}, k, \frac{\mu}{k})\}$ . Nous avons  $F(\xi_k^2)$  tend vers  $(\lambda + c_1, \mu, r_1\lambda + r_2\mu + r_4 + c_1r_1)$ . L'ensemble  $S_F$  contient donc le plan :

$$(\mathcal{P}_2) : \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4.$$

De la même façon que dans le cas 2), l'application  $F$  est dominante.

4) a) Considérons deux plans d'équations

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}_1) : \quad & \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4, \\(\mathcal{P}_2) : \quad & \alpha_3 = r'_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4.\end{aligned}$$

Nous affirmons que l'application

$$F = (x_1x_2 + x_1, x_2x_3, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r'_1x_1 + r_4)$$

admet l'union  $(\mathcal{P}_1) \cup (\mathcal{P}_2)$  comme ensemble de Jelonek  $S_F$  et est dominante.

Prenons un point  $a$  d'une strate de dimension 2 de  $S_F$ , alors  $a$  admet les deux façons possibles suivantes :

*i)* La façon  $\kappa_1 = (2)[1, 3]$ , correspondant à la suite  $\{\xi_k^1\} = \{(\frac{\lambda}{k}, k, \frac{\mu}{k})\}$ . Nous avons  $F(\xi_k^1)$  tend vers  $(\lambda, \mu, r_1\lambda + r_2\mu + r_4)$ . L'ensemble  $S_F$  contient donc le plan :

$$(\mathcal{P}_1) : \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4.$$

*ii)* La façon  $\kappa_2 = (3)[2]$ , correspondant à la suite  $\{\xi_k^2\} = \{(\lambda, \frac{\mu}{k}, k)\}$ . Nous avons  $F(\xi_k^2)$  tend vers  $(\lambda, \mu, r_2\mu + r'_1\lambda + r_4)$ . L'ensemble  $S_F$  contient donc le plan :

$$(\mathcal{P}_2) : \alpha_3 = r'_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4.$$

$S_F$  est donc l'union de deux plans  $(\mathcal{P}_1)$  et  $(\mathcal{P}_2)$ .

Prouvons maintenant que  $F$  est dominante. Considérons un point  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  dans  $\mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3 \setminus S_F$ . Nous avons le système d'équations suivant :

$$x_1x_2 + x_1 = \alpha_1, \quad x_2x_3 = \alpha_2, \quad r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r'_1x_1 + r_4 = \alpha_3. \quad (6.2.9)$$

Nous avons

$$(r'_1 - r_1)x_1 = \alpha_3 - r_1\alpha_1 - r_2\alpha_2 - r_4. \quad (6.2.10)$$

Puisque  $a \notin S_F$  et  $r_1 \neq r'_1$ , donc l'équation (6.2.10) admet une solution non nulle :

$$x_1 = \frac{\alpha_3 - r_1\alpha_1 - r_2\alpha_2 - r_4}{r'_1 - r_1},$$

et

$$x_2 = \frac{\alpha_1 - x_1}{x_1}.$$

Si  $x_2 = 0$ , alors nous avons :

$$\frac{\alpha_3 - r_1\alpha_1 - r_2\alpha_2 - r_4}{r'_1 - r_1} = \alpha_1.$$

Cela devient :

$$\alpha_3 = r'_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4,$$

d'où la contradiction. Donc nous avons  $x_2 \neq 0$  et

$$x_3 = \frac{\alpha_2}{x_2}.$$

Le système d'équations (6.2.9) admet donc toujours une solution.

b) Considérons deux plans d'équations

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_1) : \quad & \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4, \\ (\mathcal{P}_2) : \quad & \alpha_2 = \frac{1}{r_2}\alpha_3 + r'_1\alpha_1 - \frac{r_4}{r_2}. \end{aligned}$$

Nous affirmons que l'application

$$F = (x_1x_2 + x_1, x_2x_3 + r'_1x_1, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r_4)$$

admet l'union  $(\mathcal{P}_1) \cup (\mathcal{P}_2)$  comme ensemble de Jelonek  $S_F$  et est dominante.

Prenons un point  $a$  d'une strate de dimension 2 de  $S_F$ , alors  $a$  admet les deux façons possibles suivantes :

i) La façon  $\kappa_1 = (2)[1, 3]$ , correspondant à la suite  $\{\xi_k^1\} = \{(\frac{\lambda}{k}, k, \frac{\mu}{k})\}$ . Nous avons  $F(\xi_k^1)$  tend vers  $(\lambda, \mu, r_1\lambda + r_2\mu + r_4)$ . L'ensemble  $S_F$  contient donc le plan :

$$(\mathcal{P}_1) : \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4.$$

ii) La façon  $\kappa_2 = (3)[2]$ , correspondant à la suite  $\{\xi_k^2\} = \{(\lambda, \frac{\mu}{k}, k)\}$ . Nous avons  $F(\xi_k^2)$  tend vers  $(\lambda, \mu + r'_1\lambda, r_2\mu + r_4)$ . L'ensemble  $S_F$  contient donc le plan :

$$(\mathcal{P}_2) : \alpha_2 = \frac{1}{r_2}\alpha_3 + r'_1\alpha_1 - \frac{r_4}{r_2},$$

où  $r_2 \neq 0$ .

$S_F$  est donc l'union des deux plans  $(\mathcal{P}_1)$  et  $(\mathcal{P}_2)$ .

De la même façon dans le cas a), nous montrons que l'application  $F$  est dominante.

c) Considérons deux plans d'équations

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_1) : \quad & \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4, \\ (\mathcal{P}_2) : \quad & \alpha_1 = \frac{1}{r_1}\alpha_3 + r'_2\alpha_2 - \frac{r_4}{r_1} \quad (r_1 \neq 0). \end{aligned}$$

Nous affirmons que l'application

$$F = (x_1x_2 + r'_2x_3, x_2x_3 + x_3, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r_4)$$

admet l'union  $(\mathcal{P}_1) \cup (\mathcal{P}_2)$  comme ensemble de Jelonek  $S_F$  et est dominante.

Prenons un point  $a$  d'une strate de dimension 2 de  $S_F$ , alors  $a$  admet les deux façons possibles suivantes :

*i)* La façon  $\kappa_1 = (2)[1, 3]$ , correspondant à la suite  $\{\xi_k^1\} = \{(\frac{\lambda}{k}, k, \frac{\mu}{k})\}$ . Nous avons  $F(\xi_k^1)$  tend vers  $(\lambda, \mu, r_1\lambda + r_2\mu + r_4)$ . L'ensemble  $S_F$  contient donc le plan :

$$(\mathcal{P}_1) : \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4.$$

*ii)* La façon  $\kappa_2 = (1)[2]$ , correspondant à la suite  $\{\xi_k^2\} = \{(k, \frac{\lambda}{k}, \mu)\}$ . Nous avons  $F(\xi_k^2)$  tend vers  $(\lambda + r_2'\mu, \mu, r_1\lambda + r_4)$ . L'ensemble  $S_F$  contient donc le plan :

$$(\mathcal{P}_2) : \alpha_1 = \frac{1}{r_1}\alpha_3 + r_2'\alpha_2 - \frac{r_4}{r_1},$$

où  $r_1 \neq 0$ .

$S_F$  est donc l'union des deux plans  $(\mathcal{P}_1)$  et  $(\mathcal{P}_2)$ .

De la même façon dans le cas  $a)$ , nous montrons que l'application  $F$  est dominante.

5) *a)* Considérons l'union d'un plan d'équation

$$(\mathcal{P}) : \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$$

et d'une surface d'équation

$$(\mathcal{S}) : \alpha_3 = r_1\alpha_1^p + r_1'\alpha_1^{p'} + r_2\alpha_2 + r_4.$$

Nous affirmons que l'application

$$F = (x_1x_2 + x_1, x_2x_3, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r_1x_1^p + r_1'x_1^{p'} + r_4).$$

admet l'union  $(\mathcal{P}) \cup (\mathcal{S})$  comme ensemble de Jelonek  $S_F$  et est dominante.

Prenons un point  $a$  d'une strate de dimension 2 de  $S_F$ , alors  $a$  admet les deux façons possibles suivantes :

*i)* La façon  $\kappa_1 = (2)[1, 3]$ , correspondant à la suite  $\{\xi_k^1\} = \{(\frac{\lambda}{k}, k, \frac{\mu}{k})\}$ . Nous avons  $F(\xi_k^1)$  tend vers  $(\lambda, \mu, r_1\lambda + r_2\mu + r_4)$ . L'ensemble  $S_F$  contient donc le plan :

$$(\mathcal{P}) : \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4.$$

*ii)* La façon  $\kappa_2 = (3)[2]$ , correspondant à la suite  $\{\xi_k^2\} = \{(\lambda, \frac{\mu}{k}, k)\}$ . Nous avons  $F(\xi_k^2)$  tend vers  $(\lambda, \mu, r_2\mu + r_1\lambda^p + r_1'\lambda^{p'} + r_4)$ . L'ensemble  $S_F$  contient donc la surface :

$$(\mathcal{S}) : \alpha_3 = r_1\alpha_1^p + r_1'\alpha_1^{p'} + r_2\alpha_2 + r_4.$$

$S_F$  est donc l'union du plan  $(\mathcal{P})$  et de la surface  $(\mathcal{S})$ .

De la même manière que dans le cas 4), nous montrons que l'application  $F$  est dominante.

b) Considérons l'union d'un plan d'équation

$$(\mathcal{P}) : \quad \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$$

et d'une surface d'équation

$$(\mathcal{S}) : \alpha_2 = \frac{1}{r_2}\alpha_3 + r_1\alpha_1^p + r_1'\alpha_1^{p'} - \frac{r_4}{r_2}.$$

Nous affirmons que l'application

$$F = (x_1x_2 + x_1, x_2x_3 + r_1x_1^p + r_1'x_1^{p'}, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r_4)$$

admet l'union  $(\mathcal{P}) \cup (\mathcal{S})$  comme ensemble de Jelonek  $S_F$  et est dominante.

Prenons un point  $a$  d'une strate de dimension 2 de  $S_F$ , alors  $a$  admet les deux façons possibles suivantes :

i) La façon  $\kappa_1 = (2)[1, 3]$ , correspondant à la suite  $\{\xi_k^1\} = \{(\frac{\lambda}{k}, k, \frac{\mu}{k})\}$ . Nous avons  $F(\xi_k^1)$  tend vers  $(\lambda, \mu, r_1\lambda + r_2\mu + r_4)$ . L'ensemble  $S_F$  contient donc le plan :

$$(\mathcal{P}) : \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4.$$

ii) La façon  $\kappa_2 = (3)[2]$ , correspondant à la suite  $\{\xi_k^2\} = \{(\lambda, \frac{\mu}{k}, k)\}$ . Nous avons  $F(\xi_k^2)$  tend vers  $(\lambda, \mu + r_1\lambda^p + r_1'\lambda^{p'}, r_2\mu + r_4)$ . L'ensemble  $S_F$  contient donc la surface :

$$(\mathcal{S}) : \alpha_2 = \frac{1}{r_2}\alpha_3 + r_1\alpha_1^p + r_1'\alpha_1^{p'} - \frac{r_4}{r_2}.$$

$S_F$  est donc l'union du plan  $(\mathcal{P})$  et de la surface  $(\mathcal{S})$ .

De la même façon que dans le cas 4), nous montrons que l'application  $F$  est dominante.

c) Considérons l'union d'un plan d'équation

$$(\mathcal{P}) : \quad \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4$$

et d'une surface d'équation

$$(\mathcal{S}) : \quad \alpha_1 = \frac{1}{r_1}\alpha_3 + r_3\alpha_2^p + r_3'\alpha_2^{p'} - \frac{r_4}{r_1}.$$

Nous affirmons que l'application

$$F = (x_1x_2 + r_3x_3^p + r_3'x_3^{p'}, x_2x_3 + x_3, r_1x_1x_2 + r_2x_2x_3 + r_4)$$

admet l'union  $(\mathcal{P}) \cup (\mathcal{S})$  comme ensemble de Jelonek  $S_F$  et est dominante.

Prenons un point  $a$  d'une strate de dimension 2 de  $S_F$ , alors  $a$  admet les deux façons possibles suivantes :

i) La façon  $\kappa_1 = (2)[1, 3]$ , correspondant à la suite  $\{\xi_k^1\} = \{(\frac{\lambda}{k}, k, \frac{\mu}{k})\}$ . Nous avons  $F(\xi_k^1)$  tend vers  $(\lambda, \mu, r_1\lambda + r_2\mu + r_4)$ . L'ensemble  $S_F$  contient donc le plan :

$$(\mathcal{P}) : \alpha_3 = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_4.$$

ii) La façon  $\kappa_2 = (1)[2]$ , correspondant à la suite  $\{\xi_k^2\} = \{(k, \frac{\lambda}{k}, \mu)\}$ . Nous avons  $F(\xi_k^2)$  tend vers  $(\lambda + r_3\mu^p + r_3'\mu^{p'}, \mu, r_1\lambda + r_4)$ . L'ensemble  $S_F$  contient donc la surface :

$$(\mathcal{S}) : \alpha_1 = \frac{1}{r_1}\alpha_3 + r_3\alpha_2^p + r_3'\alpha_2^{p'} - \frac{r_4}{r_1}.$$

$S_F$  est donc l'union du plan  $(\mathcal{P})$  et de la surface  $(\mathcal{S})$ .

De la même manière que dans le cas a), nous montrons que l'application  $F$  est dominante.

6) Considérons la surface d'équation

$$(\mathcal{S}) : \alpha_3 = r_2\alpha_2 + r_1\alpha_1^p + r_1'\alpha_1^{p'} + r_4.$$

Nous affirmons que l'application

$$F = (x_1x_2 + x_1, x_2x_3, r_2x_2x_3 + r_1x_1^p + r_1'x_1^{p'} + x_2 + r_4)$$

admet la surface  $(\mathcal{S})$  comme ensemble de Jelonek  $S_F$  et est dominante.

Prenons un point  $a$  d'une strate de dimension 2 de  $S_F$ , alors  $a$  admet une seule façon  $\kappa = (2)[3]$ , correspondant à la suite  $\{\xi_k\} = \{(\lambda, \frac{\mu}{k}, k)\}$ . Nous avons  $F(\xi_k)$  tend vers  $(\lambda, \mu, r_1\lambda + r_2\mu + r_1\lambda^p + r_1'\lambda^{p'} + r_4)$ . L'ensemble  $S_F$  est donc la surface :

$$(\mathcal{S}) : \alpha_3 = r_2\alpha_2 + r_1\alpha_1^p + r_1'\alpha_1^{p'} + r_4.$$

De la même manière que dans le cas 1), nous montrons que l'application  $F$  est dominante.

7) Considérons trois plans d'équations

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_1) : \quad & \alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_3\alpha_3 + r_4 = 0, \\ (\mathcal{P}_2) : \quad & r_1'\alpha_1 + r_2'\alpha_2 + r_1'r_3\alpha_3 + r_1'r_4 = 0, \\ (\mathcal{P}_3) : \quad & \alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_3''\alpha_3 + r_4 = 0. \end{aligned}$$

Nous affirmons que l'application

$$F = (-r_2x_1x_2 - r_3x_2x_3 - r_4 + k_1x_1x_3, x_1x_2 + k_2x_1x_3, x_2x_3 + k_3x_1x_3),$$



où

$$r'_1 k_1 + r'_2 k_2 + r'_1 r_3 k_3 = 0, \quad -\frac{k_1 + r_2 k_2}{k_3} = r''_3 \quad \text{et } k_3 \neq 0,$$

admet l'union  $(\mathcal{P}_1) \cup (\mathcal{P}_2) \cup (\mathcal{P}_3)$  comme ensemble de Jelonek  $S_F$  et est dominante.

Prenons un point  $a$  d'une strate de dimension 2 de  $S_F$ , alors  $a$  admet les trois façons possibles suivantes :

*i)* La façon  $\kappa_1 = (2)[1, 3]$ , correspondant à la suite  $\{\xi_k^1\} = \{(\frac{\lambda}{k}, k, \frac{\mu}{k})\}$ . Nous avons  $F(\xi_k^1)$  tend vers  $(-r_2 \lambda - r_3 \mu - r_4, r_1 + k_2 r_2, \mu)$ . L'ensemble  $S_F$  contient donc le plan :

$$(\mathcal{P}_1) : \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + r_3 \alpha_3 + r_4 = 0.$$

*ii)* La façon  $\kappa_2 = (3)[1, 2]$ , correspondant à la suite  $\{\xi_k^2\} = \{(\frac{\lambda}{k}, \frac{\mu}{k}, k)\}$ . Nous avons  $F(\xi_k^2)$  tend vers  $(-r_3 \mu - r_4 + k_1 \lambda, k_2 \lambda, \mu + k_3 \lambda)$ . L'ensemble  $S_F$  contient donc le plan :

$$(\mathcal{P}_2) : r'_1 \alpha_1 + r'_2 \alpha_2 + r'_1 r_3 \alpha_3 + r'_1 r_4 = 0.$$

*iii)* La façon  $\kappa_3 = (1)[2, 3]$ , correspondant à la suite  $\{\xi_k^3\} = \{(k, \frac{\lambda}{k}, \frac{\mu}{k})\}$ . Nous avons  $F(\xi_k^3)$  tend vers  $(-r_2 \lambda - r_4 + k_1 \mu, \lambda + k_2 \mu, k_3 \mu)$ . L'ensemble  $S_F$  contient donc le plan :

$$(\mathcal{P}_3) : \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + r''_3 \alpha_3 + r_4 = 0.$$

L'ensemble  $S_F$  est donc l'union des trois plans  $(\mathcal{P}_1)$ ,  $(\mathcal{P}_2)$  et  $(\mathcal{P}_3)$ .

L'application  $F$  est dominante par le théorème 6.2.2, ce qui termine la preuve de la proposition. □

**Remarque 6.2.11.** La proposition ci-dessus nous fournit, pour chacun des 7 cas, une classe d'applications admettant pour ensemble de Jelonek le cas choisi. Notons que les applications d'une même classe ne diffèrent pas que par le choix des applications  $g_i$  et par un éventuel changement du rôle des variables.

**Exemple 6.2.12.** 1) Explicitons une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  de degré 2 telle que  $S_F$  soit le plan d'équation

$$(\mathcal{P}) : \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0.$$

Utilisons le cas 1) du théorème (6.2.5), l'application  $F$  est de la forme

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2, x_2 x_3, x_1 x_2 - x_2 x_3 + g(x_2)),$$

où  $g(x_2)$  est un polynôme non nul en la variable  $x_2$ , de coefficient constant nul et de degré au maximum 2.

2) Explicitons une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  de degré 2 telle que  $S_F$  soit l'union des deux plans d'équations

$$(\mathcal{P}_1) : \alpha_1 = 2,$$

$$(\mathcal{P}_2) : \alpha_2 = 5,$$

et d'un plan d'équation

$$(\mathcal{P}_3) : \alpha_3 = \alpha_1 + 3\alpha_2 + 6.$$

Utilisons le cas 2) du théorème (6.2.5), l'application  $F$  est de la forme

$$F = (x_1x_2 + 2, x_2x_3 + 5, x_1x_2 + 3x_2x_3 + g(x_1x_3) - 11),$$

où  $g(x_1x_3)$  est un polynôme non nul, de coefficient constant nul, et de degré 1 en la variable le produit  $x_1x_3$ .

3) Explicitons une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  de degré 2 telle que  $S_F$  soit l'union des deux plans d'équations

$$(\mathcal{P}_1) : \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

et

$$(\mathcal{P}_2) : \alpha_1 = 0.$$

Utilisons le cas 3) du théorème (6.2.5), l'application  $F$  est de la forme

$$F = (x_1x_2, x_2x_3, -x_2x_3 + g(x_1)),$$

où  $g(x_1)$  est un polynôme non nul, de coefficient constant nul et de degré au maximum 2 en la variable  $x_1$ .

4) Explicitons une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  de degré 2 telle que  $S_F$  soit l'union des deux plans d'équations

$$(\mathcal{P}_1) : \alpha_3 = 2\alpha_1 + \alpha_2,$$

et

$$(\mathcal{P}_2) : \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Utilisons le cas 4) du théorème (6.2.5), l'application  $F$  est de la forme

$$F = (x_1x_2 + x_1, x_2x_3, 2x_1x_2 + x_2x_3 + x_1).$$

Notons que  $F$  n'est pas unique. En effet, nous pouvons choisir, par exemple, l'application polynomiale dominante  $F$  comme suit

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2 + x_1, x_2x_3 + x_1^2, 2x_1x_2 + x_2x_3 + x_1 + x_1^2).$$

5) Explicitons une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  de degré 2 telle que  $S_F$  soit l'union d'un plan d'équation

$$(\mathcal{P}) : \alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2,$$

et d'une surface

$$(\mathcal{S}) : \alpha_3 = 2\alpha_2 - \alpha_1^2 + \alpha_1.$$

Utilisons le cas 5) du théorème (6.2.5), l'application  $F$  est de la forme

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2 + x_1, x_2x_3, x_1x_2 + 2x_2x_3 - x_1^2 + x_1).$$

6) Explicitons une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  de degré 2 telle que  $S_F$  soit la surface d'équation

$$(\mathcal{S}) : \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Utilisons le cas 6) du théorème (6.2.5), l'application  $F$  est de la forme

$$F = (x_1x_2 + x_1, x_2x_3, -x_2x_3 + x_1^2 + x_2).$$

7) Explicitons une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  de degré 2 telle que  $S_F$  soit l'union des trois plans d'équations

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_1) : & \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4 = 0, \\ (\mathcal{P}_2) : & 5\alpha_1 + 6\alpha_2 + 15\alpha_3 + 20 = 0, \\ (\mathcal{P}_3) : & \alpha_1 + 2\alpha_2 + 7\alpha_3 + 4 = 0. \end{aligned}$$

Utilisons le cas 3) du théorème (6.2.5), nous cherchons les nombres complexes  $k_1, k_2$  et  $k_3$  tels que

$$5k_1 + 6k_2 + 15k_3 = 0, \quad k_1 + 2k_2 + 7k_3 = 0 \quad k_3 \neq 0.$$

Nous pouvons choisir  $(k_1, k_2, k_3) = (3, -5, 1)$ . L'application  $F$  est de la forme

$$F = (-2x_1x_2 - 3x_2x_3 + 3x_1x_3 - 4, x_1x_2 - 5x_1x_3, x_2x_3 + x_1x_3).$$

Pour prouver le théorème 6.2.1, nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 6.2.13.** *Soit  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  une application polynomiale non-propre, dominante telle que  $\deg F = 2$ . Si l'ensemble  $S_F$  contient une surface  $(\mathcal{S})$ , alors  $(\mathcal{S})$  est un paraboloïde. De plus, si  $S_F$  contient une surface, alors ou bien  $S_F$  est une surface ou bien  $S_F$  est l'union d'une surface et d'un plan.*

*Démonstration.* Supposons que  $S_F$  contienne une surface  $(\mathcal{S})$ . Puisque  $\deg F = 2$  alors  $\deg(\mathcal{S}) = 2$ . L'ensemble  $S_F$  admet donc une façon qui admet une seule coordonnée "libre", par exemple  $\kappa = (3)[2]$  (voir par exemple le cas 3i, page 176, dans la preuve de la proposition 6.2.5). Supposons que la suite  $\{\xi_k\} = \{(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})\}$  corresponde à la façon  $\kappa$ , supposons donc que  $x_{3,k}$  tende vers l'infini,  $x_{2,k}$  tende vers 0, telles que  $x_{2,k}x_{3,k}$  tende vers un nombre complexe quelconque  $\lambda$  et  $x_{1,k}$  tende vers un nombre complexe quelconque  $\mu$ . Une des trois applications polynomiales  $F_1, F_2, F_3$  doit donc contenir  $x_1$  en facteur et une autre doit contenir  $x_1^2$ . Donc si l'équation de la surface  $(\mathcal{S})$  est :

$$r_1\alpha_1^{p_1} + r_2\alpha_2^{p_2} + r_3\alpha_3^{p_3} + r_4 = 0, \quad (\mathcal{S})$$

alors il existe un unique indice  $i \in \{1, 2, 3\}$  tel que

$$r_i \neq 0 \text{ et } p_i = 2, \quad 0 \leq p_j \leq 1, \quad \forall j \neq i.$$

Si  $r_j = 0$  ou  $p_j = 0$  pour tout  $j \neq i$ , alors  $(\mathcal{S})$  est l'union de deux droites, d'où la contradiction. Donc il existe  $j \neq i, j \in \{1, 2, 3\}$  tel que  $r_j \neq 0$  et  $p_j = 1$ . La surface  $(\mathcal{S})$  est donc un parabololoïde.

Observons maintenant que, puisque  $S_F$  admet  $\kappa$  comme une façon,  $F$  peut être considérée comme une application polynomiale des variables  $x_1, x_2, x_1x_2$  et  $x_2x_3$  :

$$F = \tilde{F}(x_1, x_2, x_1x_2, x_2x_3).$$

S'il existe une coordonnée  $F_i$  contenant  $x_2$  en facteur, pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , alors  $S_F$  admet une seule façon  $\kappa$  et  $S_F$  est la surface  $(\mathcal{S})$ .

Supposons que  $S_F$  contienne une autre hypersurface irréductible  $(\mathcal{H})$  qui est différente de  $(\mathcal{S})$ . Alors  $F$  peut être considérée comme une application polynomiale des variables  $x_1, x_1x_2, x_2x_3$  :

$$F = \tilde{F}(x_1, x_1x_2, x_2x_3). \quad (6.2.15)$$

Considérons maintenant une façon  $\kappa' \neq \kappa$  de  $(\mathcal{H})$ , correspondante à la suite  $\{\xi'_k\} = \{(x'_{1,k}, x'_{2,k}, x'_{3,k})\}$ . Puisque  $F$  admet la coordonnée  $x_1$  comme coordonnée libre, alors avec la suite  $\xi'_k$ , la coordonnée  $x'_{1,k}$  doit tendre vers 0. Nous avons les cinq cas possibles suivants :

1)  $\kappa' = (2)[1]$ , alors  $F$  est une application polynomiale de la forme :

$$F = \tilde{F}(x_1, x_3, x_1x_2, x_1x_3).$$

Combinons avec (6.2.15), alors  $F$  est de la forme :

$$F = \tilde{F}(x_1, x_1x_2).$$

L'application  $F$  n'est pas dominante, d'où la contradiction.

2)  $\kappa' = (3)[1]$ , alors  $F$  est une application polynomiale de la forme :

$$F = \tilde{F}(x_1, x_2, x_1x_2, x_1x_3).$$

Combinons avec (6.2.15), alors  $F$  est de la forme :

$$F = \tilde{F}(x_1, x_1x_2).$$

L'application  $F$  n'est pas dominante, d'où la contradiction.

3)  $\kappa' = (2, 3)[1]$ , alors  $F$  est une application polynomiale de la forme :

$$F = \tilde{F}(x_1, x_1x_2, x_1x_3).$$

Combinons avec (6.2.15), alors  $F$  est de la forme :

$$F = \tilde{F}(x_1, x_1x_2).$$

L'application  $F$  n'est pas dominante, d'où la contradiction.

4)  $\kappa' = (3)[1, 2]$ , alors  $F$  est une application polynomiale de la forme :

$$F = \tilde{F}(x_1, x_2, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1).$$

Combinons avec (6.2.15), alors  $F$  est de la forme :

$$F = \tilde{F}(x_1, x_1x_2, x_2x_3).$$

Puisque  $x'_{1,k}x'_{2,k}$  et  $x'_{1,k}$  tendent vers 0, alors  $\dim(\mathcal{H}) \leq 1$ , d'où la contradiction.

5)  $\kappa' = (2)[1, 3]$ , alors  $F$  est une application polynomiale de la forme :

$$F = \tilde{F}(x_1, x_3, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1).$$

Combinons avec (6.2.15), alors  $F$  est de la forme :

$$F = \tilde{F}(x_1, x_1x_2, x_2x_3).$$

Nous savons que  $x'_{1,k}$  tend vers 0. Supposons que  $x'_{1,k}x'_{2,k}$  tende vers un nombre complexe  $\lambda$  et  $x'_{2,k}x'_{3,k}$  tend vers un nombre complexe  $\mu$  alors nous avons

$$(\mathcal{H}) = \{(F_1(0, \lambda, \mu), F_2(0, \lambda, \mu), F_3(0, \lambda, \mu)) : \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}.$$

La dimension de  $(\mathcal{H})$  est donc égal 2. Puisque  $\deg F = 2$ , le degré de  $F_i$  en les variables  $\lambda$  et  $\mu$  doit être 1, pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ . L'hypersurface  $(\mathcal{H})$  est donc un plan. Donc si  $S_F$  contient une surface alors ou bien  $S_F$  est une surface, ou bien  $S_F$  est l'union d'une surface et d'un plan.

□

**Corollaire 6.2.16.** Soit  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  une application polynomiale non-propre, dominante telle que le degré de  $F$  est 2. Alors l'ensemble  $S_F$  est de l'une des formes suivantes :

- 1) L'union au maximum de trois plans.
- 2) L'union d'un plan et d'un paraboloïde.
- 3) Un paraboloïde.

*Démonstration.* Rappelons que pour le cas  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ , l'ensemble  $S_F$  est de l'une des formes suivantes :

- 1) L'union au maximum de trois plans.
- 2) L'union d'un plan et d'une surface.
- 3) Une surface.
- 4) L'union de deux surfaces.
- 5) L'union de deux plans et d'une surface.
- 6) L'union de deux surfaces et d'un plan.

D'après le lemme 6.2.13, les cas 4), 5) et 6) ne sont pas possibles. De plus, si  $S_F$  contient une surface, alors cette surface est un paraboloïde. Par ailleurs, d'après les propositions 6.2.2 et 6.2.5, les cas 1), 2) et 3) sont réalisables. Nous obtenons donc le résultat.  $\square$

Nous fournissons maintenant la démonstration du théorème 6.2.1 :

*Démonstration du théorème 6.2.1.* Les cas 1) et 2) de notre théorème 6.2.1 sont obtenus à partir des propositions 6.2.2 et 6.2.5. Prouvons maintenant les cas 3), 4), 5), là où  $S_F$  contient au moins deux hypersurfaces irréductibles. Dans ce cas  $S_F$  contient au moins deux façons. Supposons que  $\kappa$  et  $\kappa'$  soient deux façons différentes de  $S_F$  et que  $\xi_k$  et  $\xi'_k$  soient deux suites correspondantes. Rappelons qu'une façon  $\kappa$  de  $S_F$  appartient à l'un des six groupes de façons suivants :

- 1) groupe I : (1, 2, 3),
- 2) groupe II : (1, 2), (2, 3) et (3, 1),
- 3) groupe III : (1), (2) et (3),
- 4) groupe IV : (1, 2)[3], (1, 3)[2] et (2, 3)[1],
- 5) groupe V : (1)[2], (1)[3], (2)[1], [2](3), [3](1) et [3](2),
- 6) groupe VI : (1)[2, 3], (2)[1, 3] et (3)[1, 2].

Nous utilisons le résultat de la preuve du théorème 4.8.8, page 121. Nous avons les cas possibles suivants :

I) le cas 3) dans la preuve du théorème 4.8.8 :  $\kappa$  appartient au groupe I et  $\kappa'$  appartient au groupe IV, par exemple  $\kappa = (1, 2, 3)$  et  $\kappa' = (1, 2)[3]$ . De l'exemple 4.8.4, page 119, nous savons que  $F$  est une application polynomiale dominante de la forme

$$F = \tilde{F}(x_1 - x_2, (x_1 - x_2)x_1, (x_1 - x_2)x_2, (x_1 - x_2)x_3, (x_1 - x_3)x_3, (x_2 - x_3)x_3).$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} F(\xi_k) &\rightarrow \tilde{F}(0, \lambda, \lambda, \lambda, \mu, \mu - \lambda), \\ F(\xi'_k) &\rightarrow \tilde{F}(0, \lambda', \lambda', 0, \mu', \mu'). \end{aligned}$$

Nous voyons que

+ pour la suite  $\xi_k$ , les variables pertinentes tendant vers des nombres complexes quelconques ont le degré 2, donc la façon  $\kappa$  nous fournit un plan  $(\mathcal{P})$ . De la même manière, la façon  $\kappa'$  nous fournit un plan  $(\mathcal{P}')$ ,

+ il y a un seul changement entre les limites  $F(\xi_k)$  et  $F(\xi'_k)$  : la quatrième variable pertinente  $(x_1 - x_2)x_3$  tend vers un nombre complexe quelconque pour la suite  $\xi_k$ , alors qu'elle tend vers 0 pour la suite  $\xi'_k$ .

Cela nous permet de changer *indépendamment* au maximum un coefficient de  $x_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  dans les équations des plans  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$ , c'est-à-dire que si les équations des plans  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$  sont :

$$(\mathcal{P}) : r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3 + r_4 = 0,$$

$$(\mathcal{P}') : r'_1x_1 + r'_2x_2 + r'_3x_3 + r'_4 = 0,$$

alors il y a au moins deux coefficients dans  $\{r'_1, r'_2, r'_3\}$  dépendant des autres coefficients.

Le coefficient  $r'_4$  dépend toujours des autres coefficients  $r_1, r_2, r_3, r_4, r'_1, r'_2, r'_3$ , cela est éclairé par les propositions 6.2.2 et 6.2.5. Ce cas est donc un cas particulier du cas 3) de notre théorème.

De nouveau, par le résultat de la preuve du théorème 4.8.8, dans ce cas, l'ensemble  $S_F$  est l'union de deux plans  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$  puisque  $S_F$  n'admet alors que deux façons  $\kappa = (1, 2, 3)$  et  $\kappa' = (1, 2)[3]$ .

II) le cas 4) dans la preuve du théorème 4.8.8 :  $\kappa$  appartient au groupe I et  $\kappa'$  appartient au groupe V, par exemple  $\kappa = (1, 2, 3)$  et  $\kappa' = (1)[2]$ . Alors, d'une part,  $F$  est une application polynomiale dominante de la forme

$$F = \tilde{F}(x_2 - x_3, (x_2 - x_3)x_2, (x_2 - x_3)x_3, (x_1 - x_2)x_2, (x_1 - x_3)x_2). \quad (6.2.17)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} F(\xi_k) &\rightarrow \tilde{F}(0, \lambda, \lambda, \mu, \lambda + \mu), \\ F(\xi'_k) &\rightarrow \tilde{F}(\lambda', 0, \lambda'^2, \mu', \mu'). \end{aligned}$$

Par le même argument que dans le cas I) ci-dessus, nous avons

a) ou bien les façons  $\kappa$  et  $\kappa'$  nous fournissent deux plans  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$ , respectivement, et nous permettent de changer au maximum indépendamment deux

coefficients entre  $\{r_1, r_2, r_3\}$  et  $\{r'_1, r'_2, r'_3\}$ . Nous obtenons donc le cas 3) de notre théorème.

b) ou bien la façon  $\kappa$  nous fournit un plan  $(\mathcal{P})$  et la façon  $\kappa'$  nous fournit un paraboloïde  $(\mathcal{S})$  tels que si les équations du plan  $(\mathcal{P})$  et du paraboloïde  $(\mathcal{S})$ , respectivement, sont :

$$(\mathcal{P}) : \quad r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3 + r_4 = 0,$$

$$(\mathcal{S}) : \quad r'_1x_1^2 + r'_2x_2 + r'_3x_3 + r'_4 = 0,$$

nous obtenons alors le cas 4) de notre théorème.

Par un calcul rapide, dans ce cas, si  $S_F$  admet une autre façon  $\kappa^*$  différente des façons  $\kappa$  et  $\kappa'$ , alors cette façon nous fournit une strate de dimension 1 contenue ou bien dans  $(\mathcal{P})$  ou bien dans  $(\mathcal{S})$ .

III) Le cas 5) dans la preuve du théorème 4.8.8 :  $\kappa$  appartient au groupe I et  $\kappa'$  appartient au groupe VI, par exemple  $\kappa = (1, 2, 3)$  et  $\kappa' = (1)[2, 3]$ , alors, d'une part,  $F$  est une application polynomiale dominante de la forme

$$F = \tilde{F}((x_1 - x_2)x_2, (x_1 - x_2)x_3, (x_1 - x_3)x_2, (x_1 - x_3)x_3, \\ (x_2 - x_3), (x_2 - x_3)x_1, (x_2 - x_3)x_2, (x_2 - x_3)x_3).$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} F(\xi_k) &\rightarrow \tilde{F}(\lambda - \mu, \quad \lambda - \mu, \quad \lambda - \nu, \quad \lambda - \nu, \quad 0, \quad \mu - \nu, \quad \mu - \nu, \quad \mu - \nu), \\ F(\xi'_k) &\rightarrow \tilde{F}(\mu', \quad \nu', \quad \mu', \quad \nu', \quad 0, \quad \mu' - \nu', \quad 0, \quad 0). \end{aligned}$$

Dans ce cas,  $S_F$  n'admet que deux façons  $\kappa$  et  $\kappa'$ . Ces deux façons nous fournissent deux plans  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$ , et nous permettent de changer indépendamment au maximum un coefficient parmi  $\{r_1, r_2, r_3\}$  et  $\{r'_1, r'_2, r'_3\}$ . Ce cas est similaire au cas I) et nous fournit un cas particulier du cas 3) de notre théorème.

IV) le cas 10) dans la preuve du théorème 4.8.8 :  $\kappa$  appartient au groupe II et  $\kappa'$  appartient au groupe VI, par exemple  $\kappa = (1, 2)$  et  $\kappa' = (1)[2, 3]$ , alors, d'une part,  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_3, (x_1 - x_2)x_2, (x_1 - x_2)x_3). \quad (6.2.18)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} F(\xi_k) &\rightarrow \tilde{F}(\nu, \quad \lambda - \mu, \quad 0), \\ F(\xi'_k) &\rightarrow \tilde{F}(0, \quad \mu', \quad \nu'). \end{aligned}$$

Ce cas est similaire au cas II) ci-dessus et nous fournit les cas 3) et 4) de notre théorème.



V) le cas 16) dans la preuve du théorème 4.8.8 :  $\kappa$  appartient au groupe IV, par exemple  $\kappa = (1, 2)[3]$  et  $\kappa'$  appartient au groupe V :

a)  $\kappa' = (1)[2]$ , alors  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_3, x_2x_3, (x_1 - x_2)x_2). \quad (6.2.19)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} F(\xi_k) &\rightarrow \tilde{F}(0, \nu, \lambda - \mu), \\ F(\xi'_k) &\rightarrow \tilde{F}(\nu', 0, \mu'). \end{aligned}$$

b)  $\kappa' = (3)[1]$  ; alors  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_1x_3, x_1 - x_2, (x_1 - x_2)x_1, (x_1 - x_2)x_2). \quad (6.2.20)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} F(\xi_k) &\rightarrow \tilde{F}(\nu, 0, \lambda - \mu, \lambda - \mu), \\ F(\xi'_k) &\rightarrow \tilde{F}(\lambda', -\mu', 0, -\mu'^2). \end{aligned}$$

Ces cas sont similaires au cas II) ci-dessus et nous fournissent les cas 3) et 4) de notre théorème.

VI) le cas 17) dans la preuve du théorème 4.8.8 :  $\kappa$  appartient au groupe IV, par exemple  $\kappa = (1, 2)[3]$  et  $\kappa'$  appartient au groupe VI :

a)  $\kappa' = (1)[2, 3]$ , alors  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_3, x_2x_3, x_1x_3, (x_1 - x_2)x_2).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} F(\xi_k) &\rightarrow \tilde{F}(0, \nu, \nu, \lambda - \mu), \\ F(\xi'_k) &\rightarrow \tilde{F}(0, 0, \nu', \mu'). \end{aligned}$$

Ce cas est similaire au cas I) ci-dessus et nous fournit un cas particulier du cas 3) de notre théorème.

b)  $\kappa' = (2)[1, 3]$  : nous avons le même résultat que dans le cas a) ci-dessus, où

$$F = \tilde{F}(x_3, x_1x_3, x_2x_3, (x_1 - x_2)x_1).$$

c)  $\kappa' = (3)[1, 2]$  :  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_1x_3, x_2x_3, x_1 - x_2, (x_1 - x_2)x_1, (x_1 - x_2)x_2).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} F(\xi_k) &\rightarrow \tilde{F}(\nu, \nu, 0, \lambda - \mu, \lambda - \mu), \\ F(\xi'_k) &\rightarrow \tilde{F}(\lambda', \mu', 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Ces cas sont similaires au cas I) ci-dessus et nous fournissent un cas particulier du cas 3) de notre théorème.

VII) le cas 19ii) dans la preuve du théorème 4.8.8 :  $\kappa$  appartient au groupe V, par exemple  $\kappa = (1)[2]$  et  $\kappa' = (2)[1, 3]$ . Alors  $F$  est une application de la forme

$$F = \tilde{F}(x_3, x_1x_2, x_2x_3).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} F(\xi_k) &\rightarrow \tilde{F}(\nu, \mu, 0), \\ F(\xi'_k) &\rightarrow \tilde{F}(0, \lambda', \nu'). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc les cas 3) et 4) de notre théorème.

VIII) le cas 20) dans la preuve du théorème 4.8.8 :  $\kappa$  appartient au groupe VI et  $\kappa'$  appartient aussi au groupe VI, par exemple,  $\kappa = (1)[2, 3]$  et  $\kappa' = (2)[1, 3]$ . De l'exemple 4.8.3, page 117,  $F$  est une application polynomiale dominante de la forme

$$F = \tilde{F}(x_3, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1). \quad (6.2.21)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} F(\xi_k) &\rightarrow \tilde{F}(0, \mu, 0, \nu), \\ F(\xi'_k) &\rightarrow \tilde{F}(0, \lambda', \mu', 0). \end{aligned}$$

Dans ce cas, nous avons deux possibilités :

a)  $F$  admet  $x_3$  comme variable, alors  $S_F$  n'admet que deux façons  $\kappa = (1)[2, 3]$  et  $\kappa' = (2)[1, 3]$ . Ce cas est similaire au cas IIa) ci-dessus et nous fournit le cas 3) de notre théorème.

b)  $F$  n'admet pas  $x_3$  comme variable, c'est-à-dire

$$F = \tilde{F}(x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1). \quad (6.2.22)$$

Dans ce cas,  $S_F$  admet encore une façon  $\kappa = (3)[1, 2]$  avec la suite correspondante  $\xi''_k$ , et nous avons

$$\begin{aligned} F(\xi_k) &\rightarrow \tilde{F}(\mu, 0, \nu), \\ F(\xi'_k) &\rightarrow \tilde{F}(\lambda', \mu', 0), \\ F(\xi''_k) &\rightarrow \tilde{F}(0, \mu'', \nu''). \end{aligned}$$

Dans ce cas  $S_F$  est l'union de trois plans dont les formes sont comme dans le cas 5) de notre théorème.

□

**Remarque 6.2.23.** Si  $F$  n'est pas dominante, par exemple, si  $F$  contient deux coordonnées "libres", alors le théorème 6.2.1 n'est plus vrai, comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 6.2.24.** Considérons l'application  $F : \mathbb{C}^3_{(x_1, x_2, x_3)} \rightarrow \mathbb{C}^3_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}$  telle que  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2)$ . Nous voyons que  $F$  n'est pas dominante

puisque l'application  $F$  ne dépend que des deux variables  $x_1$  et  $x_2$ . L'ensemble  $S_F$  est l'union de trois surfaces :

$$\begin{aligned} S_{F_1} : \alpha_3 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_2 && \text{(avec la suite } (\alpha_1, \alpha_2, k) \text{ où } \alpha_1, \alpha_2 \neq 0), \\ S_{F_2} : \alpha_3 &= \alpha_2^2 && \text{(avec la suite } (0, \alpha_2, k) \text{ où } \alpha_2 \neq 0), \\ S_{F_3} : \alpha_3 &= \alpha_1^2 && \text{(avec la suite } (\alpha_1, 0, k) \text{ où } \alpha_1 \neq 0). \end{aligned}$$

**Remarque 6.2.25.** Nous pouvons procéder de la même manière pour les cas où le degré de  $F$  est plus grand et nous obtenons aussi la liste des ensembles de Jelonek possibles, qui est certainement différente de la liste du théorème 6.2.1, comme le montrent les exemples suivants :

**Exemple 6.2.26.** L'application polynomiale  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  telle que

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^3 + x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2, x_1x_2, x_1x_3)$$

est dominante et l'ensemble  $S_F$  est la surface  $\alpha_1 = \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ .

**Exemple 6.2.27.** L'application polynomiale  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  telle que

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^3 + x_1^2x_2x_3, x_1x_2, x_1x_3)$$

est dominante est l'ensemble  $S_F$  est la surface  $\alpha_1 = \alpha_2\alpha_3$ .

**Remarque 6.2.28.** Dans le cas où  $\deg F = 4$ , alors  $S_F$  peut contenir deux surfaces. La raison en est que les applications coordonnées peuvent contenir des facteurs de formes  $(x_1x_2)^2$ ,  $(x_2x_3)^2$  et  $(x_3x_1)^2$ , comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 6.2.29.** Considérons l'application  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  telle que

$$F = (x_1x_2 + x_1, x_2x_3 + x_1^2, x_1^2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_1 + x_1^2).$$

Supposons que la suite  $\{\xi_k\} = \{(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})\}$  tende vers l'infini et que  $F(\xi_k)$  tende vers  $a \in S_F$ . Si  $x_{1,k}$  tend vers 0,  $x_{2,k}$  tend vers l'infini et  $x_{3,k}$  tend vers 0 telles que  $x_{1,k}x_{2,k}$  tend vers  $\lambda$  et  $x_{2,k}x_{3,k}$  tend vers  $\mu$ , alors  $F(\xi_k)$  tend vers  $(\lambda, \mu, \lambda^2 + 2\mu)$ . Donc l'ensemble  $S_F$  contient la surface  $\alpha_3 = \alpha_1^2 + \alpha_2$ . Si  $x_{1,k}$  tend vers  $\lambda$ ,  $x_{2,k}$  tend vers 0 et  $x_{3,k}$  tend vers l'infini telles que  $x_{2,k}x_{3,k}$  tend vers  $\mu$ , alors  $F(\xi_k)$  tend vers  $(\lambda, \mu + \lambda^2, 2\mu + \lambda + \lambda^2)$ . Donc l'ensemble  $S_F$  contient la surface  $\alpha_3 = 2\alpha_2 - \alpha_1^2 + \alpha_1$ . Nous voyons que  $x_{1,k}$  ne peut pas tendre vers l'infini et qu'il n'y a donc pas d'autre possibilité. L'ensemble  $S_F$  est donc l'union des deux surfaces de degré 2,  $\alpha_3 = \alpha_1^2 + \alpha_2$  et  $\alpha_3 = 2\alpha_2 - \alpha_1^2 + \alpha_1$ .

Nous conjecturons que nous pouvons utiliser un programme d'ordinateur pour procéder à un algorithme permettant de décrire la liste des ensembles de Jelonek possibles des applications polynomiales dominantes  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ .

### 6.3 L'ensemble $S_F$ d'une application rationnelle

Donnons d'abord ici la définition d'une application rationnelle propre et de l'ensemble de Jelonek d'une application rationnelle.

**Définition 6.3.1.** Soit  $F : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$  une application rationnelle. Nous notons

$$S_F = \{a \in \mathbb{K}^n : \exists \{\xi_k\} \subset \mathbb{K}^m \text{ telle que } \xi_k \rightarrow \infty, F(\xi_k) \rightarrow a\}.$$

L'application  $F$  est dite *propre* si  $S_F = \emptyset$ , sinon  $F$  n'est pas propre.

Une question se pose : *comment définir l'ensemble de Jelonek pour une application rationnelle ?*

Nous faisons la première observation suivante :

**Remarque 6.3.2.** Si  $F : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  est une application polynomiale alors  $F$  est propre. Mais ceci n'est plus vrai pour une application rationnelle, même si  $F$  n'a pas de "pôles", c'est-à-dire  $F$  est régulière. Par exemple, soit  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $F(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ . Alors  $S_F = \{1\}$ , puisque avec  $\{x_k\} = \{k\}$  nous avons  $F(x_k)$  tend vers 1. En fait, dans le cas où  $F = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ ,  $\deg f_1 \leq \deg f_2$  alors  $F$  n'est pas propre et  $S_F$  est un point.

Les exemples suivants éclairent la remarque 6.3.7 et le théorème 6.3.10 qui suivent :

**Exemple 6.3.3.** Soit  $F : \mathbb{R}_{(x_1, x_2)}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2$  telle que

$$F(x_1, x_2) = \left( x_1, \frac{x_1 x_2^3}{1 + x_2^6} \right).$$

Nous avons  $S_F$  est le plan  $\{\alpha_2 = 0\}$  puisque pour tout  $(\alpha_1, 0) \in S_F$ , il existe une suite  $\{\xi_k\} = \{(\alpha_1, k)\}$  telle que  $F(\xi_k)$  tend vers  $(\alpha_1, 0)$ .

**Exemple 6.3.4.** Soit  $F : \mathbb{R}_{(x_1, x_2)}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2$  telle que

$$F(x_1, x_2) = \left( x_1 x_2, \frac{x_2 + x_1 x_2}{x_1 + x_2} \right).$$

L'ensemble des pôles de  $F$  est une droite d'équation  $x_1 + x_2 = 0$ .

Soit une suite  $(x_{1,k}, x_{2,k})$  tendant vers l'infini et telle que  $F(x_{1,k}, x_{2,k})$  ne tende pas vers l'infini. Alors  $x_{1,k}$  tend vers l'infini ou  $x_{2,k}$  tend vers l'infini mais  $x_{1,k} x_{2,k}$  ne tend pas vers l'infini. Supposons que  $x_{1,k} x_{2,k}$  tende vers  $\alpha_1$ . Si  $x_{1,k}$  tend vers l'infini alors  $x_{2,k}$  tend vers 0 et  $F(x_{1,k}, x_{2,k})$  tend vers  $(\alpha_1, 0)$ . Si  $x_{1,k}$  tend vers 0 alors  $x_{2,k}$  tend vers l'infini et  $F(x_{1,k}, x_{2,k})$  tend vers  $(\alpha, 1)$ . L'ensemble  $S_F$  est donc l'union de deux droites (c'est une hypersurface de  $\mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2$ ).

**Exemple 6.3.5.** Soit  $F : \mathbb{R}_{(x_1, x_2)}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2$  telle que

$$F(x_1, x_2) = \left( x_1, \frac{x_1 x_2}{x_2 - 1} \right).$$

L'ensemble des pôles de  $F$  est la droite  $x_2 = 1$ .

Soit une suite  $(x_{1,k}, x_{2,k})$  tendant vers l'infini et telle que  $F(x_{1,k}, x_{2,k})$  ne tende pas vers l'infini. Alors  $x_{1,k}$  tend vers  $\alpha_1$  et  $x_{2,k}$  tend vers l'infini donc  $F(x_{1,k}, x_{2,k})$  tend vers  $(\alpha_1, \alpha_1)$ . L'ensemble  $S_F$  est la droite  $\alpha_2 = \alpha_1$ .

**Exemple 6.3.6.** Soit  $F : \mathbb{R}_{(x_1, x_2)}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2$  telle que

$$F(x_1, x_2) = \left( \frac{x_1 x_2}{x_2 - 1}, \frac{x_1^2}{x_1 - 1} \right).$$

L'ensemble des pôles de  $F$  est constitué de deux droites  $x_1 = 1$  et  $x_2 = 1$ .

Soit une suite  $(x_{1,k}, x_{2,k})$  tendant vers l'infini telle que  $F(x_{1,k}, x_{2,k})$  ne tende pas vers l'infini. Alors  $x_{1,k}$  tend vers  $\alpha_1$  et  $x_{2,k}$  tend vers l'infini donc  $F(x_{1,k}, x_{2,k})$  tend vers  $(\alpha_1, \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1 - 1})$ . L'ensemble  $S_F$  est une courbe dont l'équation est  $x_2 = \frac{x_1^2}{x_1 - 1}$  et qui est donc une hypersurface de  $\mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2$ .

**Remarque 6.3.7.** L'ensemble  $S_F$  d'une application rationnelle est du même type que celui d'une application polynomiale, pour la raison suivante :

Considérons une application rationnelle  $F : X \dashrightarrow Y$  où  $X, Y$  sont des variétés affines.

Nous avons  $O_X(X) = A(X)$ , c'est-à-dire qu'une application régulière  $F = \frac{g}{h}$  sur  $X$ , avec  $(h(x) \neq 0, \forall x \in X)$  est une application polynomiale. Si  $F$  est application rationnelle sur  $X$  mais n'est pas régulière sur  $X$ , alors puisque l'ensemble  $\{x \in X : h(x) = 0\}$  est un sous-ensemble fermé pour la topologie Zariski, l'application  $F$  est régulière sur un sous-ensemble ouvert  $U = X \setminus \{x \in X : h(x) = 0\}$  qui est dense dans  $X$ . Dans ce cas  $S_F$  est encore une hypersurface de  $Y$  puisque  $F$  est une application polynomiale sur  $U \subset X$ , où  $\bar{U} = X$ .

**Lemme 6.3.8.** Soit  $F : X \dashrightarrow Y$  une application rationnelle où  $X, Y$  sont des variétés affines. Alors  $F$  induit une application polynomiale  $F_1 : X \rightarrow \tilde{Y}$  où  $\tilde{Y}$  est le complété projectif de  $Y$ .

L'exemple suivant illustre le lemme 6.3.8 ci-dessus :

**Exemple 6.3.9.** Soit  $F : \mathbb{R}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  une application rationnelle telle que

$$F(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{x_1}{x_1 - 1}, x_2, x_2 x_3 \right).$$

Alors

$$S_F = \left\{ \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1}, 0, \alpha_2 \right) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

est le plan  $\{\alpha_2 = 0\}$  moins des points infinis  $(\infty, 0, \alpha_2)$ . Autrement dit, si nous considérons l'application induite

$$F_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{R}^3$$

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 - 1) : x_1 : x_2(x_1 - 1) : x_2x_3(x_1 - 1)),$$

nous avons :

- i) si  $x_1 \neq 1$ , alors  $F_1(x_1, x_2, x_3) = (1 : \frac{x_1}{x_1 - 1} : x_2 : x_2x_3)$  et donc  $F_1(x_1, x_2, x_3) = F(x_1, x_2, x_3)$ ,
- ii) si  $x_1 = 1$  alors  $F_1(1, x_2, x_3) = (0 : 1 : 0 : 0)$  qui est le point à l'infini.

Notons que  $S_{F_1}$  est une hypersurface, l'ensemble  $S_F$  est donc une hypersurface puisque  $S_F = S_{F_1} \setminus \{\text{points à l'infini}\}$ .

**Théorème 6.3.10.** *Soit  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application rationnelle dominante, alors :*

- 1) *Si  $n = 1$ , l'application  $F$  peut ne pas être propre. Par ailleurs, l'application rationnelle  $F$  n'est pas propre si et seulement si  $F = \frac{f}{g}$  où  $\deg f \leq \deg g$  et  $S_F$  est réduit à un point.*
- 2) *Si  $n > 1$ , comme le cas d'une application polynomiale, l'ensemble  $S_F$  est vide ou une hypersurface.*

*Démonstration.* 1) Si  $F = \frac{f}{g}$  et  $\deg f > \deg g$  alors  $F$  est une application polynomiale et  $F$  est propre. Si  $\deg f < \deg g$  alors l'ensemble  $S_F$  se réduit au point 0 dans  $\mathbb{C}$ . Si  $\deg f = \deg g$  alors l'ensemble  $S_F$  se réduit à un point complexe non nul.

2) D'après le lemme 6.3.8, l'application rationnelle  $F : X \dashrightarrow Y$  induit une application polynomiale  $F_1 : X \rightarrow \tilde{Y}$  où  $\tilde{Y}$  est le complété projectif de  $Y$ . L'ensemble  $S_{F_1}$  est une hypersurface. L'ensemble  $S_F$  est donc une hypersurface puisque  $S_F = S_{F_1} \setminus \{\text{points à l'infini}\}$ .

□



# Bibliographie

- [Al] T. Aliashvili, *Geometry and topology of proper polynomial mappings*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 160, No. 6, 2009.
- [Bo] J. Bochnak, M. Coste and M.-F. Roy, *Geométrie algébrique réelle*, Springer 1987.
- [Br1] J.-P. Brasselet, *Introduction to intersection homology and perverse sheaves*, to appear.
- [Br2] J.-P. Brasselet, M. Goresky and R. MacPherson, *Simplicial Differential Forms with Poles*, Amer. J. Math. 113 (1991), no. 6, 1019–1052.
- [Co] M. Coste, *An introduction to semialgebraic geometry*, Institut de Recherche Mathématique de Rennes, 2002, 54–55.
- [GM] M. Goresky and R. MacPherson, *Intersection homology theory*, Topology 19 (1980), 135–162.
- [Ha] R. Hardt, *Semi-algebraic local-triviality in semi-algebraic mappings*, Amer. J. Math. 102 (1980), no. 2, 291–302.
- [J1] Z. Jelonek, *The set of point at which polynomial map is not proper*, Ann. Polon. Math. 58 (1993), no. 3, 259–266.
- [J2] Z. Jelonek, *Testing sets for properness of polynomial mappings*, Math. Ann. 315 (1999), no. 1, 1–35.
- [J3] Z. Jelonek, *Geometry of real polynomial mappings*, Math. Z. 239 (2002), no. 2, 321–333.
- [JK] Z. Jelonek, K. Kurdyka, *Reaching generalized critical values of a polynomial*, arXiv :1203.0539v1 [math.AG] 2 Mar 2012.
- [Ki] F. Kirwan and J. Woolf, *An introduction to intersection homology theory*, 2nd ed. Chapman Hall. 2006.
- [Kl] S. Kleiman, *The development of intersection homology theory*, A century of mathematics in America, Part II, Hist. Math. 2, Amer. Math. Soc., 1989, pp. 543–585.
- [KPS] K. Kurdyka, P. Orro, S. Simon, *Semialgebraic Sard Theorem for generalized critical values*, J. Differential Geometry 56 (2000), 67–92.



- [Ma] R. MacPherson, *Intersection Homology and Perverse Sheaves*, Report December 15, 1990. Unpublished Notes : <http://faculty.tcu.edu/gfriedman/notes/ih.pdf>
- [M1] J. Mather, *Notes on topological stability*, 1970, mimeographic notes, Harvard University.
- [M2] J. Mather, *Stratifications and mappings, Dynamical systems* (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971. Academic Press, New York, 1973, pp. 195-232.
- [Mo] T. Mostowski, *Some properties of the ring of Nash functions*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 3 (1976), no. 2, 245-266.
- [NT-V-V] T. B. T. Nguyen, A. Valette, G. Valette, *On a singular variety associated to a polynomial mapping*, Journal of Singularities volume 7 (2013), 190-204.
- [NT1] Nguyen Thi Bich Thuy, *Stratifications de la variété asymptotique associée à une application polynomiale*, En préparation.
- [NT2] Nguyen Thi Bich Thuy, *Newton polygon and Jacobian Conjecture*, Master Thesis, 03/2010, Mathematics Institute, Hanoi, Vietnam.
- [Pa1] A. Parusiński, *On the bifurcation set of complex polynomial with isolated singularities at infinity*, Compositio Math. 97 (1995), 369-384.
- [Pa2] A. Parusiński, *A note on singularities at infinity of complex polynomials*, in “Symplectic Singularities and Geometry of Gauge fields”, eds. R. Budzyński et al., Banach Center Publications 39, Warszawa (1997), 131-141.
- [Pi] S. Pinchuk, *A counterexample to the strong Jacobian conjecture*, Math. Zeitschrift, 217, 1-4, (1994).
- [Sh] I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*. Springer 1974
- [MHS1] M.H. Schwartz, *Classes caractéristiques définies par une stratification d’une variété analytique complexe*, CRAS 260 (1965) 3262 - 3264 et 3535 - 3537.
- [MHS2] M.H. Schwartz, *Champs radiaux sur une stratification analytique*, Travaux en cours, Vol. 39, Hermann, Paris, 1991.
- [Th] R. Thom, *Ensembles et morphismes stratifiés*, Bull. Amer. Math. Soc., 75, 2, 240-284, 1969.
- [Tr] D. Trotman, *Lectures on Real Stratification Theory*, LATP-UMR 6632, University of Provence, Marseille, France, 12 October 2005.
- [PT] P. Tworzewski et T. Winiarski, *Analytic sets with proper projections*, J.Reine Angew. Math. 337 (1982), 68-76.
- [Va-Va] A. Valette et G. Valette, *Geometry of polynomial mappings at infinity via intersection homology*, arXiv :1007.2394v1 [math.AG] 14Jul2010.

- [Va1] G. Valette,  *$L^\infty$  cohomology is intersection cohomology*, arXiv :0912.0713v2 [mathAG] 6Jul2012.
- [Wh] H. Whitney, *Tangents to an analytic variety*, Annals of Math. (2) 81 (1965), 496-549.